管理运筹学

江文奇　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书是南京理工大学课程建设成果，为管理类专业本科生量身定制，以提高学生应用运筹学知识解决实际问题的能力为目的，将管理背景与运筹学知识点有机结合，删减了数学推导内容，增加了贴近管理实践的实用案例。本书通过案例导入的方式，以应用为主线，构建了全书的逻辑框架和知识体系，内容主要包括线性规划、灵敏度分析、运输问题、目标规划、整数规划、动态规划、图论、存储论、对策论和排队论，并基于 LINGO 软件编写了相关实验指导，每章后配有练习题。本书提供课件、练习题参考答案等教辅资料，读者可登录华信教育资源网 www. hxedu. com. cn 注册下载。

本书可作为管理学相关专业本科生和研究生的教材，也可供从事相关管理工作的工程人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

管理运筹学/江文奇编著. —北京：电子工业出版社，2014.12
（华信经管创优系列）
ISBN 978-7-121-24923-5

I. ①管… II. ①江… III. ①管理学-运筹学-高等学校-教材 IV. ①C931.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 274686 号

策划编辑：秦淑灵
责任编辑：苏颖杰
印　　刷：三河市鑫金马印装有限公司
装　　订：三河市鑫金马印装有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编：100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：18.25　字数：464 千字
版　　次：2014 年 12 月第 1 版
印　　次：2014 年 12 月第 1 次印刷
印　　数：3000 册　　定价：39.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　言

运筹学是研究优化问题的一门学科。近年来，有关运筹学的教材很多，但是有关运筹学在管理领域应用的教材偏少。根据我多年来的教学体会和项目应用，认为有必要将运筹学的知识体系与管理实践有机结合起来，并侧重于问题的分析和模型设计，弱化理论过程的推导及验证。为此，我开始搜索管理案例，筹划编写本书。

本书内容分为11章，包括了管理专业学生所运用的必要知识点，分别是绪论、线性规划和单纯形法、对偶理论和灵敏度分析、运输问题、目标规划、整数规划、动态规划、图与网络分析、存储论、对策论和排队论。

本书的主要特色体现在：

(1)将运筹学的知识点与管理实践有机结合。重视管理运用，注重用实际案例来诠释运筹学的相关理论应用。

(2)弱化理论推导。很多管理专业的学生对理论验证缺乏兴趣，而更关心运筹学的知识架构究竟有助于解决何类管理问题。本书将理论推导过程作为附录，仅供学生参考和借鉴。

(3)体现知识的连贯性和连续性。运筹学的一些知识点具有连贯性，某些知识点也独自成章。兼顾上述特征，本书的章节安排突出了线性规划模型及其应用，而将其他类型的理论体系置于其后。

(4)重视软件应用。目前计算运筹学模型的软件很多，本书介绍了两种较为简单的软件，即Excel和LINGO软件，并结合案例详细介绍了应用步骤，可以帮助读者更好地运用运筹学模型解决实践问题。

本书编写过程中，研究生沈平康和丁健美完成了案例的收集和整理的主要工作，研究生尚优完成了公式的编辑和排版工作，付出了大量的心血和劳动。电子工业出版社的秦淑灵女士为本书的出版提出了诸多创造性的建议，在此一并感谢。

本书在编写过程中力求深入浅出，运用案例导入的方式，以激发读者的阅读和学习兴趣，通俗易懂；对一些较难的知识点进行了较为详细的诠释，重点突出一些容易忽略和出错的环节，力求使读者能够全面深入地掌握运筹学的基本思想和理论。

由于作者水平有限，书中难免存在一些错误，敬请读者批评指正。

江文奇

目　　录

第 1 章　绪　　论

本章概要

1.1　运筹学概述
　　1.1.1　运筹学的发展历程
　　1.1.2　运筹学的研究对象

1.2　运筹学应用
　　1.2.1　运筹学的工作步骤
　　1.2.2　运筹学的管理应用

学习目标　学完本章后，你将能够：

1. 了解有关运筹学的主要发展历程。
2. 理解运筹学的主要工作过程。
3. 了解运筹学在管理实践领域的应用。

1.1 运筹学概述

运筹学是一种定量分析的工具和方法。了解运筹学的发展历程和性质特征，将有助于更好地掌握运筹学的核心思想，进而将运筹学的思想应用到管理实践中。

1.1.1 运筹学的发展历程

20 世纪 30 年代末，英国和美国为了对付德国的空袭，开始研究如何合理运用雷达问题，称为“运用研究”（operational research）或运筹学研究。为此，在英国和美国军队中成立了一些专门小组，开展了护航舰队保护商船队的编队问题研究，以及当船队遭受德国潜艇攻击时，如何使船队损失最少的问题研究。同时，他们也研究了反潜深水炸弹的合理爆炸深度，使德国潜艇被摧毁数增加到 400%。同时，针对船只受敌机攻击的问题，提出了大船应急转向和小船应缓慢转向的逃避方法，取得了显著成效。

第二次世界大战后，英国和美国军队中相继成立了运筹研究组织，以兰德公司为首的一些组织开始着重研究战略性问题、未来的武器系统的设计等。

20 世纪 60 年代，运筹学除了在军事方面应用以外，在工业、农业、经济和社会等各领域都有应用。同时，运筹学的学科体系也逐渐完善，如数学规划（线性规划、非线性规则、整数规划、目标规划、动态规划、随机规划等）、图论与网络、排队论（随机服务系统理论）、存储论、对策论、决策论、维修更新理论、可靠性和质量管理等。

这些理论并不是同一时间形成的。例如，排队论是丹麦工程师爱尔朗 1917 年在哥本哈根电话公司研究电话通信系统时提出的；存储论是在 20 世纪 20 年代初提出的；线性规划是由丹捷格在 1947 年制定美国空军军事规划时提出的，并给出了求解线性规划问题的单纯形法。

最早建立运筹学会的国家是英国（1948 年），接着是美国（1952 年）、法国（1956 年）、日本、印度（1957 年）等，我国是在 1980 年建立运筹学会的。到 2005 年为止，国际上已有 48 个国家和地区建立了运筹学会或类似的组织。1959 年，英、美、法三国运筹学会发起成立了国际运筹学联合会（IFORS）；1975 年，欧洲运筹学协会（EURO）成立；1985 年，亚太运筹学协会（APORS）成立。

运筹学的快速发展与数学和计算技术的发展密不可分。其中，数学可以为运筹学的相关模型提供求解算法，而计算技术可以解决复杂大规模的运筹学模型，间接提高了运筹学模型的现实适用性。

1.1.2 运筹学的研究对象

运筹学是一门应用性很强的学科，至今仍然没有一个完全确切的定义。总体说来，运筹学是运用科学的方法（如分析、试验、量化等）来决定如何最佳地运营和设计各种系统的一门学科，通过对经济管理系统中的人力、物力、财力等资源进行统筹安排，为决策者提供有依据的最优方案，以实现最有效的管理。其决策目标主要是最优和最佳，要求避开最劣的方案。

英国运筹学会认为运筹学是一系列科学方法的应用，通过科学地建立系统模型，包括度量各种因素，以此预测和比较各种决策、策略或控制的结果，使管理机构科学地确定它的政策及行动。

美国运筹学会认为运筹学是在对有限的资源进行分配的情况下，做出人机系统最优设计和操作的科学决策。

无论何种定义，均认为运筹学是提供以数量化为基础的科学方法，可以为决策者选择最优决策提供定量数据。决策者可以对有关活动中错综复杂的问题进行数量分析，并归纳为一定的模型，运用运筹学的原理和方法提出解决问题的最优途径和方案。

在现实世界中，模型可以划分为三种，即形象模型、模拟模型和数学模型。数学模型是应用最多的模型。构建模型常常需要对现实的问题进行抽象并凝练，分析常量假定变量，按照一定的规则加以设计，而模型的解也将有助于指导实践。

在数学模型中，目标的评价准则一般要求达到最佳(最大或最小)、适中、满意等。准则可以是单一的，也可以是多个的。约束条件可以没有，也可有多个。当模型中没有随机因素时，称为确定性模型，否则为随机模型。随机模型的评价准则可用期望值，也可用方差，还可用某种概率分布来表示。当可控变量只取离散值时，称为离散模型，否则成为连续模型。

模型可以按用途来命名，如分配模型、运输模型、更新模型、排队模型、存储模型等；还可以用研究对象来命名，如能源模型、教育模型、军事对策模型、宏观经济模型等。

1.2　运筹学应用

运筹学能够发挥作用主要体现在应用领域。目前，运筹学的相关理论和方法已经应用到实践中，也取得了较好的成效。

1.2.1　运筹学的工作步骤

运筹学在解决大量实际问题过程中形成了自己的工作步骤，可以描述为：

(1)提出和刻画问题。现实问题很复杂也很抽象，常常需要将一些复杂的问题进行简单化处理。通过收集大量的资料，有效区分常量和变量。要弄清楚问题的目标、可能的约束、问题的可控变量以及有关参数。

(2)建立模型。即把问题中可控变量、参数与约束之间的关系用一定的模型表示出来。这种刻画首先需要了解模型的结构和形式，才能够有针对性地设计模型。

(3)求解。用各种手段(主要是数学方法，也可用其他方法)将模型求解，解可能是最优解、次优解、满意解。复杂模型的求解需要使用计算机，解的精度要求可由决策者提出。解的结果重在应用，能够指导实践的解才是有意义的解。

(4)解的检验。检查求解步骤和程序有无错误，然后检查是否反映现实问题。

(5)解的控制。通过控制解的变化过程，决定对解是否要做一定的改变。

(6)解的实施。将解用到实际中必须要考虑到实施的问题，如向实际部门讲清解的用法。对于结构化的问题，解的结果可以直接进行应用；对于半结构化的问题，解在应用过程中可能需要加以调整；对于非结构化的问题，数学模型可能难以解决实际问题。

要说明的是，现实中的很多数学模型较为复杂，软件求解是非常必要的。目前，有Excel、Lingo、Lindo、Matlab等软件可以求解运筹学的相关模型。本书中也将进行介绍。

1.2.2　运筹学的管理应用

运筹学的管理应用主要有以下方面：

(1)市场销售。主要应用在广告预算和媒介的选择、竞争性定价、新产品开发、销售计划的制定等方面。例如美国杜邦公司就将运筹学用于研究如何做好广告工作、产品定价和新产品的引入。

(2)生产计划。在总体计划方面主要用于总体确定生产、存储和劳动力的配合等计划，以适应波动的需求计划。线性规划和模拟方法等还可用于生产作业计划、日程表的编排等，也应用在合理下料、配料问题、物料管理等方面。

(3)库存管理。主要应用于多种物资库存量的管理，确定某些设备的能力或容量，如停车场的大小、新增发电设备的容量大小、电子计算机的内存量、合理的水库容量等。目前，国外的新动向是将存储论与计算机的物资管理信息系统相结合。

(4)运输问题。涉及空运、水运、公路运输、铁路运输、管道运输、厂内运输。空运涉及飞行航班和飞行机组人员服务时间安排等。公路运输除了汽车调度计划外，还有公路网的设计和分析、市内公共汽车路线的选择和行车时刻表的安排、出租汽车的调度和停车场的设立。

(5)财政和会计。涉及预算、贷款、成本分析、定价、投资、证券管理、现金管理等，可以采用统计分析、数学规划、决策分析、盈亏点分析、价值分析等方法。

(6)人事管理。主要包括人员的获得和需求估计、人才的开发(即进行教育和训练)、人员的分配(各种指派问题)、各类人员的合理利用问题、人才的评价以及如何测定一个人对组织和社会的贡献、工资和津贴的确定等。

(7)设备维修、更新和可靠性、项目选择和评价。

(8)工程的优化设计。在建筑、电子、光学、机械和化工等领域都有应用。

(9)城市管理。各种紧急服务系统的设计和运用，如救火站、救护车、警车等分布点的设立。此外，还有城市垃圾的清扫、搬运和处理，城市供水和污水处理系统的规划等。

第 2 章　线性规划和单纯形法

本章概要

线性规划问题的例子

2.1　线性规划问题及其数学模型

　2.1.1　线性规划问题的提出

　2.1.2　线性规划模型的标准化

　2.1.3　线性规划模型的图解法

　2.1.4　线性规划模型解的概念

2.2　单纯形法

　2.2.1　初始基可行解的确定

　2.2.2　最优性检验与解的判别

　2.2.3　基变换

　2.2.4　迭代(旋转运算)

　2.2.5　单纯形法求解

2.3　表格单纯形法

　2.3.1　单纯形表设计

　2.3.2　表格单纯形法计算步骤

　2.3.3　人工变量法

　2.3.4　退化

2.4　线性规划模型的应用及软件求解

　2.4.1　线性规划模型的应用

　2.4.2　线性规划模型的软件求解

学习目标　学完本章后，你将能够：

1. 运用图解法求解线性规划问题，并判定解的情况。
2. 系统理解线性规划问题的几何意义。
3. 运用单纯形法求解一般线性规划问题。
4. 学会线性规划问题的建模及运用相关软件求解。

线性规划问题的例子

北方某金属罐铸造厂的主要产品有 4 种，分别用代号 A、B、C、D 表示。近年来，产品销售情况良好，预测结果表明，需求还有进一步扩大的趋势，客户希望能有更多的不同功能的新产品问世。工厂面临进一步扩大再生产、努力开发适销对路新产品的问题。

生产 A、B、C、D 这 4 种金属罐主要经过以下 4 个阶段。

第 1 阶段是冲压：金属板经冲压机冲压，制造成金属罐产品所需要的零件。

第 2 阶段是成型：在该车间里把零件制成符合规格的形状。

第 3 阶段是装配：在装配车间，各种成型的零件按技术要求焊接在一起成为完整金属罐。

第 4 阶段是喷漆：将装配好的金属罐送到喷漆车间，喷上防火的瓷漆以装饰外表。

根据工艺要求及成本核算单位产品所需的加工时间、利润以及可利用总工时如表 2-1 所示。

表 2-1　单位产品所需的加工时间、利润及可利用总工时表

工时/产品件 工序	A	B	C	D	可利用总工时(min/天)
冲压	1	1	1	1	480
成型	4	8	2	5	2400
装配	4	2	5	5	2000
喷漆	6	4	8	4	3000
单产利润/元	9	6	11	8	

该厂仅有一台冲压机，每天工作 8 h，即共计 480 min 可供加工用。另有若干个成型中心，装配中心、喷漆中心分属各车间，除承担本厂生产任务外，还承担着科研试验、新产品开发试制等项工作，因此这些生产中心每天可利用的总工时分别不超过 2400 min、2000 min 和 3000 min。

根据当前的生产条件，工厂每天该如何安排 A、B、C、D 这 4 种产品的产量，才能使得利润最大化？

2.1　线性规划问题及其数学模型

在生产经营管理中，需要经常进行计划或者规划。虽然各行业的计划或规划千差万别，但其共同点可归纳为：在各项资源条件的限制下，如何确定方案，使预期的目标达到最优。即如何合理地利用有限的人力、物力、财力等资源，以得到最好的经济效果。以最优的经济效果为目标函数，以有限的各种资源为约束条件建立模型，即为这类规划问题的数学模型。

2.1.1　线性规划问题的提出

【例 2-1】(生产计划)某工厂在计划期内要安排生产Ⅰ、Ⅱ两种产品，已知生产单位产品所需的设备台时及 A、B 两种原材料的消耗，如表 2-2 所示。

表 2-2　设备台时和原材料消耗表

	Ⅰ	Ⅱ	
设备	3	2	8 台时
原材料 A	2	5	16 kg
原材料 B	1	2	12 kg

每生产一件产品Ⅰ和产品Ⅱ分别获利 2 元和 3 元，如何安排计划使该工厂获利最多?

【解】设 x_1，x_2 分别表示在计划期内产品Ⅰ、Ⅱ的产量。

两种产品的产量计划制定受到两类资源的影响，设备约束表示为 $3x_1+2x_2\leqslant 8$，原材料 A、B 的约束可以分别表示为 $2x_1+5x_2\leqslant 16$ 和 $x_1+2x_2\leqslant 12$。

如果用 z 表示利润，利润的变动受到两类产品产量的影响，而产品产量受到资源限量的影响，故获利最大生产计划的数学模型可以表示为

$$\text{目标函数}\qquad \max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{满足约束条件(s. t)}:\begin{cases}3x_1+2x_2\leqslant 8\\ 2x_1+5x_2\leqslant 16\\ x_1+2x_2\leqslant 12\\ x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}\tag{2-1}$$

类似于【例 2-1】的优化问题属于线性规划问题。这类问题具有一些共同特征：

(1)用一组决策变量(x_1，…，x_n)表示决策方案的取值，而且这些决策变量在目标函数和约束条件中的幂均为 1，具备线性特征。同时，决策变量可以取负值、正值或未知符号值(无约束值)。

(2)根据资源约束，设计线性表达式(即约束条件)，可以用等式或不等式来表示。

(3)目标函数是决策变量的线性函数，一般取最大或者最小。

满足以上三个条件的数学模型称为线性规划的数学模型。其一般形式为

$$\text{目标函数}\quad \max(\min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n\tag{2-2}$$

$$\text{满足约束条件(s. t)}\quad\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(\geqslant,\ =)b_1\\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(\geqslant,\ =)b_2\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(\geqslant,\ =)b_m\\ x_i\geqslant 0,\ \text{or}\leqslant 0,\ \text{or 无约束}(i=1,\ \cdots,\ n)\end{cases}\tag{2-3}$$

在线性规划的数学模型中，式(2-2)称为目标函数，式(2-3)称为约束条件，可以写成 subject to，以下简称 s. t。

从模型(2-1)获知，一个现实的管理优化问题要转化为线性规划模型，首先需要假设变量，进而设计目标函数和约束条件。变量的寻求主要与目标有关，通过对目标进行分解而设计变量，再将变量与相关常数加以组合而设计约束条件即可。

【例 2-2】(农业投资问题)某农场要新买一批拖拉机以完成每年三季的工作量：春种 330 hm^2，夏管 130 hm^2，秋收 470 hm^2。可供选择的拖拉机型号、单台投资额及工作能力如表 2-3 所示。

表 2-3　拖拉机型号、单台投资额及工作能力表

拖拉机型号	单台投资额/元	单台工作能力/hm^2		
		春种	夏管	秋收
东方红	5000	30	17	41
丰收	4500	29	14	43
跃进	4400	32	16	42
胜利	5200	31	18	44

问配购哪几种拖拉机各几台，才能完成上述每年工作量且使总投资最少？

【解】构建本例的规划模型，需要了解总投资目标的组成部分，即四大类拖拉机。于是可以假设东方红、丰收、跃进和胜利的拖拉机台数分别为 x_1、x_2、x_3、x_4，约束可以划分为春种、夏管和秋收的公顷数，其线性规划模型为

$$\min z = 5000x_1 + 4500x_2 + 4400x_3 + 5200x_4$$

$$\text{s.t}:\begin{cases}30x_1 + 29x_2 + 32x_3 + 31x_4 \geqslant 330\\17x_1 + 14x_2 + 16x_3 + 18x_4 \geqslant 130\\41x_1 + 43x_2 + 42x_3 + 44x_4 \geqslant 470\\x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0,\ \text{为整数}\end{cases} \tag{2-4}$$

尽管该线性规划模型与【例 2-1】的模型类似，但目标函数和约束条件均发生了改变。

实际上，线性优化模型可以划分成两大类，即最大和最小。前者表示在资源约束既定的情况下实现产出最大，而后者表示在产出固定的情况下投入最小。

2.1.2 线性规划模型的标准化

模型(2-1)和模型(2-4)的目标函数和约束条件的符号均不同，增加了求解线性规划模型解的难度。为此，需要将各类线性规划模型转化为统一的标准形式，从而有利于设计一致的求解算法，这个过程即是线性规划模型的标准化过程。

线性规划模型的标准化特征主要包括：

(1)目标函数取最大值。

(2)所有约束条件为等式。

(3)所有变量为非负。

(4)所有约束条件等式的右端为非负。

在标准化的四个特征中，变量的符号对目标函数和约束条件影响最大。因此，线性规划模型的标准化首先需要对变量标准化，才能保证目标函数和约束条件的变量均符合标准化的要求。标准化的步骤如下。

步骤 1：对线性规划模型的变量实施标准化。

如果变量 $x_i \leqslant 0$，则将其转化为非负，令 $x_j = -x_i$，将规划模型中所有的 x_i 替换为 $-x_j$。

如果某个变量 x_i 无约束，即 x_i 符号未知，可以用两个非负的变量替代 x_i，令 $x_i = x_k - x_{k+1}$，将规划模型中所有的 x_i 替换为 $x_k - x_{k+1}$。

如果某个变量本身为非负，则不用变换。

步骤 2：判断目标函数为最大值还是最小值。

如果目标函数是最大值，则符合标准化的条件，不用变换；如果目标函数是最小值，则需要将目标函数乘以“-1”，变成最大值。

步骤 3：分析每个约束式右端的常数的符号。

如果符号为负，则需要约束式左右两边均乘以“-1”，将右端变成非负。

步骤 4：将所有约束式变成等式。

如果约束式的左端 ≤ 右端，则需要在左端加上一个非负变量(松弛变量)，变成等式。

如果约束式的左端 ≥ 右端，则需要在左端减去一个非负变量(剩余变量)，变成等式。

如果约束条件为等式，则不需要进行任何技术处理。

【例 2-3】对【例 2-1】进行标准化处理。

【解】由于【例 2-1】的线性规划模型中的变量均为非负，不需要进行任何变换；同时，目标函数是最大值，满足标准化条件；约束式右端均为非负，所以仅需将约束式变成等式。

在模型(2-1)中，三个约束式均是左端 ≤ 右端，因此只需在每个约束式左端分别加上松弛变量 x_3、x_4、x_5 即可。于是，其标准化形式为

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8\\2x_1 + 5x_2 + x_4 = 16\\x_1 + 2x_2 + x_5 = 12\\x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geqslant 0\end{cases} \tag{2-5}$$

【例 2-4】对【例 2-2】进行标准化处理。

【解】由于【例 2-2】的线性规划模型中的变量均为非负，故不需要变换。其目标函数为最小值，需要变换成最大值，即 $\max z = -5000x_1 - 4500x_2 - 4400x_3 - 5200x_4$。

所有的约束式右端均为非负，故满足标准化特征。但是约束式并不是等式，且左端大于等于右端，需要在每个约束式的左端减去一个剩余变量。于是，其标准化的模型为

$$\max z = -5000x_1 - 4500x_2 - 4400x_3 - 5200x_4$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}30x_1 + 29x_2 + 32x_3 + 31x_4 - x_5 = 330\\17x_1 + 14x_2 + 16x_3 + 18x_4 - x_6 = 130\\41x_1 + 43x_2 + 42x_3 + 44x_4 - x_7 = 470\\x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7 \geqslant 0\text{，为整数}\end{cases} \tag{2-6}$$

【例 2-5】将下述线性规划模型进行标准化处理：

$$\min z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 7\\-x_1 + x_2 - x_3 \leqslant -2\\-3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5\\x_1 \geqslant 0,\ x_2 \leqslant 0,\ x_3\text{ 无约束}\end{cases} \tag{2-7}$$

【解】标准化处理的步骤如下：

首先，将变量转换成非负，令 $x_2 = -x_4$，$x_3 = x_5 - x_6$，分别替代模型(2-7)中的 x_2、x_3。

其次，令 $Z = -z$，把 $\min z$ 改为求 $\max z$，即目标函数乘以“-1”；在第一个约束不等式“≤”号的左端加入松弛变量 x_7，把第二个约束不等式左右端均乘以“-1”后减去剩余变量 x_8，即可得到该问题的标准型

$$\max z = x_1 + 2x_4 + 3x_5 - 3x_6$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}x_1 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 = 7\\x_1 + x_4 + x_5 - x_6 - x_8 = 2\\-3x_1 - x_4 + 2x_5 - 2x_6 = 5\\x_1,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8 \geqslant 0\end{cases} \tag{2-8}$$

线性规划模型的标准化处理要注意的关键环节是，变量转换以及添加的松弛变量和剩余变量不能重复，否则将会导致线性规划模型的解发生根本性的改变。

2.1.3　线性规划模型的图解法

假定某线性规划问题仅有两个变量，则可以采用画图的方式求解。例如：

$$\max z = 1500x_1 + 2500x_2$$
$$\text{s.t:}\begin{cases}3x_1 + 2x_2 \leqslant 65 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 40 \\ 3x_2 \leqslant 75 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0\end{cases} \tag{2-9}$$

采用图解法求解线性规划问题，首先需要建立坐标系，并在坐标系中画出所有的约束条件和目标函数，找出满足约束条件的区域，即可行域，可行域之中的任何点都称为可行解；接着标明目标函数值改善的方向；再画出目标函数等值线，令其沿着目标函数改善的方向平行移动，找出与可行域最后相交的点，该点即为最优解。将最优解代入到目标函数中，即可得到目标函数的最优值。模型(2-9)的图解坐标图如图 2-1 所示。

如果模型(2-9)的目标函数或者约束条件发生改变，则相应的坐标轴和可行域也可能发生改变，并可能会影响最优解。假定模型(2-9)的目标函数变为 $\max z = 1500x_1 + 1000x_2$，则其图解坐标图如图 2-2 所示。此时，线性规划问题为无穷多最优解。

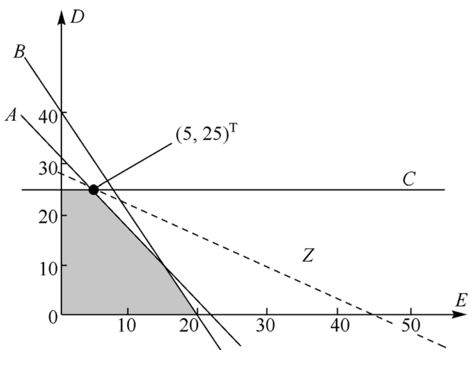


图 2-1　模型(2-9)的图解坐标图

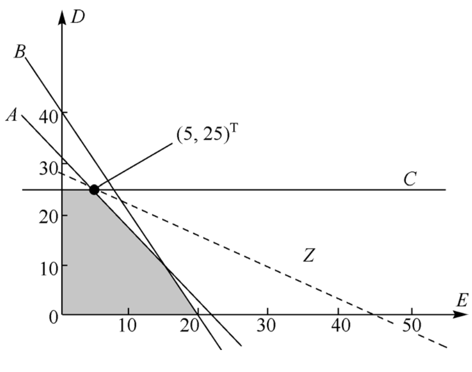


图 2-2　模型(2-9)目标函数改变后的图解坐标图

假定模型(2-9)的第二和第三个约束条件改变为 $3x_1 + 2x_2 \leqslant 65$ 和 $2x_1 + x_2 \leqslant 40$，且所有的变量均为无约束，其图解坐标图变为图 2－3。此时，线性规划问题无有限解。

假定模型(2-9)增加一个约束条件 $x_1 + x_2 \geqslant 40$，其图解坐标图变为图 2-4。此时，线性规划问题无解。

上述图解法的结果表明，任何线性规划问题并非一定具有最优解，因此需要客观分析线性规划问题解的类型，从而为建立线性规划模型或应用提供良好的支撑。

线性规划问题的解通常可以划分为如下几种类型。

1. 唯一最优解

对于线性规划模型(2-9)，由于目标函数的等值线与可行域的边界交点只有一个，因此，该模型只有唯一的最优解。

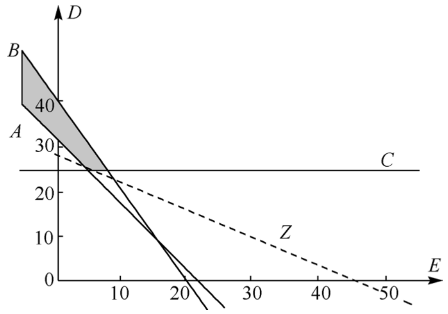


图 2-3　模型(2-9)约束条件改变后的图解坐标图

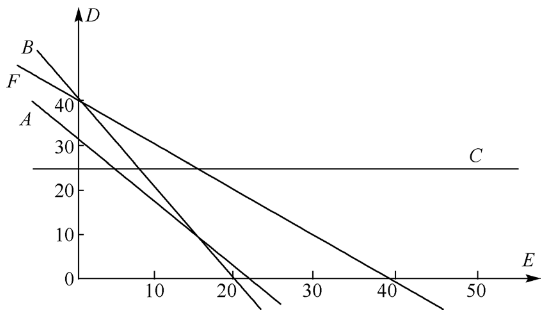


图 2-4　模型(2-9)增加约束条件后的图解坐标图

2. 无穷多最优解

当模型(2-9)的目标函数变为 $\max z = 1500x_1 + 1000x_2$ 时，其斜率与 $3x_1 + 2x_2 \leqslant 65$ 相同，正好与可行域的一段边界重合。于是，该线段上所有的点均为此线性规划模型的最优解。

3. 无界解

在图 2-3 所示的可行域中，目标函数的等值线一直可以增加，故该问题存在无界解。

4. 无可行解

在图 2-4 中，增加的约束条件与原有的约束条件的交集为空集，故该线性规划问题无解。

当求解结果出现第 2. 、3. 和 4. 情况时，一般说明线性规划问题的数学模型有错误，可能缺乏必要的约束条件或存在矛盾的约束条件，建模时应该多加注意。

图解法说明：当线性规划问题的可行域非空时，它是有界或无界凸多边形。若线性规划问题存在最优解，它一定在有界可行域的某个顶点得到；若在两个顶点同时得到最优解，则它们连线上的任意一点都是最优解，即有无穷多个最优解(凸集见附录 A)。

图解法虽然直观、简便，但当变量数多于三个时，它就无能为力了，所以需要创建一些新的求解线性规划模型算法。

2.1.4　线性规划模型解的概念

求解线性规划问题，需要理解线性规划问题解的概念。针对如下具有标准形式的线性规划模型，本节重点阐述线性规划模型解的类型：

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t:} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & i = 1, 2, \cdots, m \\ x_j \geqslant 0 & j = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{2-10}$$

1. 可行解和最优解

满足约束条件的解 $\boldsymbol{X} = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 称为线性规划问题的可行解，使目标函数达到最优值的可行解称为最优解。

2. 基

按照线性代数求解线性方程的基本思想，如果方程组的个数多于变量的个数，可能存在

多余的等式或者部分等式之间存在冲突，导致无解；如果方程组个数等于变量的个数，存在唯一解或无解。通常变量的个数均多于方程的个数。为了获取线性模型的解，通常需要引入一些概念。

设 $\boldsymbol{A}$ 是约束方程组的 $m \times n$ 维系数矩阵，其秩为 m；$\boldsymbol{B}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中 $m \times m$ 阶的非奇异子矩阵（即 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$），则称 $\boldsymbol{B}$ 是线性规划问题的一个基，即矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是由 m 个线性独立的列向量组成。不失一般性地，可设

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_m)$$

$\boldsymbol{P}_j(j = 1, 2, \cdots, m)$ 称为基向量；与基向量 $\boldsymbol{P}_j$ 相应的变量 $x_j(j = 1, 2, \cdots, m)$ 为基变量，否则称为非基变量。

为了进一步讨论线性规划问题的解，下面研究约束方程组的求解问题。假设该方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 m，因 $m < n$，故它可能有无穷多个解。假设前 m 个变量的系数列向量是线性独立的，这时约束条件可写成

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix} x_m = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \vdots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix} x_{m+1} - \cdots - \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n \tag{2-11}$$

或

$$\sum_{j=1}^{m} p_j x_j = b - \sum_{j=m+1}^{n} p_j x_j$$

此时，基为 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_m)$。

设基变量 $\boldsymbol{X}_B = (x_1, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}$，若非基变量 $x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0$，这时变量的个数等于线性方程的个数。用高斯消去法，求出一个解 $\boldsymbol{X} = (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$。

解的非零分量的数目不大于方程个数 m，称 $\boldsymbol{X}$ 为基解。有一个基就可求出一个基解。

3. 基可行解

满足非负条件的基解称为基可行解。基可行解的非零分量的数目也不大于 m，并且都是非负的。

4. 可行基

对应于基可行解的基称为可行基。上述约束方程组中，具有基解的数目最多有 C_n^m 个。基解中的非零分量的个数小于 m 个时，该基解是退化解。以下讨论假设不出现退化的情况。

2.2 单纯形法

单纯形法是求解线性规划问题的通用方法，是美国数学家 G. B. 丹捷格于 1947 年首先提出的。单纯形法求解线性规划的理论依据是：线性规划问题的可行域是 n 维向量空间中的多

面凸集，其最优值如果存在必在该凸集的某顶点处达到。单纯形法的求解过程一般借助单纯形表来完成。

2.2.1　初始基可行解的确定

为了确定初始基可行解，要首先找到初始可行基。

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j = b_i & i = 1, 2, \cdots, m \\ x_j \geqslant 0 & j = 1, 2, \cdots, n\end{cases} \tag{2-12}$$

通常，可从 $\boldsymbol{P}_j$ 中直接观察到存在一个初始可行基 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_m) = \boldsymbol{I}_{m\times m}$ 。

如果不能直接观察到初始可行基，可重新对 x_j 及 $a_{ij}(i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n)$ 进行变换，得下列方程组：

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \\ \quad x_j \geqslant 0; j = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{2-13}$$

得到一个 $m \times m$ 单位矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_m) = \boldsymbol{I}_{m\times m}$ 。

将式(2-13)中的每个等式移项，有

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - a_{1,m+1}x_{m+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ x_2 = b_2 - a_{2,m+1}x_{m+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \quad\vdots \\ x_m = b_m - a_{m,m+1}x_{m+1} - \cdots - a_{mn}x_n \end{cases} \tag{2-14}$$

令 $x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0$ ，可得 $x_i = b_i(i = 1, 2, \cdots, m)$ 。又因 $b_i \geqslant 0$ ，所以得到一个初始基可行解 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_m, \underbrace{0, \cdots,}_{n-m个} 0)^{\mathrm{T}} = (b_1, b_2, \cdots b_m, \underbrace{0, \cdots,}_{n-m个} 0)^{\mathrm{T}}$ 。

如果标准化的线性规划模型经过上述变换，仍然无法找到一个初始可行基，则需要引入人工变量，将在下节讨论。

2.2.2　最优性检验与解的判别

2.1.4 节中说明线性规划模型可能存在唯一最优解、无穷多最优解、无界解和无可行解四种情况，因此，需要对每个基可行解进行有效判别并建立判别准则(证明见附录 A)。

将模型(2-14)的约束方程进行转换，有 $x_i = b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}x_j$ ，将其代入目标函数中，有

$$z = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i + \sum_{j=m+1}^{n}\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}\right)x_j \tag{2-15}$$

令 $z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$, $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}(j = m+1, \cdots, n)$ ，于是 $z = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n}(c_j - z_j)x_j$ 。

再令 $\sigma_j = c_j - z_j(j = m+1, \cdots, n)$，则 $z = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n}\sigma_j x_j$，其中 σ_j 称为检验数。

1. 最优解的判别定理

若 $\boldsymbol{X}^{(0)} = (b_1, \cdots, b_m, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 为对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的一个基可行解，且对于一切 $j = m+1, \cdots, n$，有 $\sigma_j \leqslant 0$，则 $\mathrm{X}^{(0)}$ 为最优解。

2. 无穷多最优解判别定理

若 $\boldsymbol{X}^{(0)} = (b_1, \cdots, b_m, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 为一个基可行解，且对一切 $j = m+1, \cdots, n$，有 $\sigma_j \leqslant 0$，又存在某个非基变量的检验数 $\sigma_{m+k} = 0$，则线性规划模型有无穷多最优解。

3. 无界解判别定理

若 $\boldsymbol{X}^{(0)} = (b_1, \cdots, b_m, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 为一个基可行解，有一个非基变量检验数 $\sigma_{m+k} > 0$，并且对 $i = 1, 2, \cdots, m$，有 $a_{i,m+k} \leqslant 0$，则该线性规划模型具有无界解。

以上讨论的线性规划模型都是针对标准形式的线性规划模型，即求目标函数极大化时的情况。当求目标函数极小化时，可以将其化为标准型，分析解的情况。

如果不化为标准型，只需在上述 1. 和 2. 中把 $\sigma_j \leqslant 0$ 改写为 $\sigma_j \geqslant 0$，3. 中将 $\sigma_{m+k} > 0$ 改写为 $\sigma_{m+k} < 0$ 即可。

上述检验数的计算公式均以 $\max z = \boldsymbol{CX}$、$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{X} \geqslant 0$ 为标准型；以 $c_j - z_j \leqslant 0$（$j = 1, 2, \cdots, n$）为最优解的判别准则。除此之外，还可以表示为

$$z = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i - \sum_{j=m+1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j\right)x_j = z_0 - \sum_{j=m+1}^{n}(z_j - c_j)x_j$$

要求目标函数实现最大化时，可用 $c_j - z_j \leqslant 0$ 作为判别准则；要求目标函数实现最小化时，可用 $c_j - z_j \geqslant 0$ 或 $z_j - c_j \leqslant 0$ 来判别目标函数已达到最小。可以描述为

检验数 \ 标准型	$\max z = CX$ $AX = b$，$X \geqslant 0$	$\min z = CX$ $AX = b$，$X \geqslant 0$
$c_j - z_j$	$\leqslant 0$	$\geqslant 0$
$z_j - c_j$	$\geqslant 0$	$\leqslant 0$

2.2.3 基变换

若初始基可行解 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 不是最优解或不能判别无界时，需要找一个新的基可行解。具体做法是：从原可行基解中换一个列向量（当然要保证线性独立），得到一个新的可行基，这个过程称为基变换。为了换基，先要确定换入变量，再确定换出变量，并让它们相应的系数列向量进行变换，就得到一个新的基可行解。

1. 换入变量的确定

由 2.2.2 节可知，当某些 $\sigma_j > 0$ 时，x_j 增加则目标函数值还可以增大，这时要将某个非基变量 x_j 换到基变量中去（称为换入变量）。若有两个以上的 $\sigma_j > 0$，为了使目标函数值增加得快，一般选 $\sigma_j > 0$ 中的大者，即 $\max\limits_{j}(\sigma_j > 0) = \sigma_k$，此时对应的 x_k 为换入变量，当然也可以任选或按最小足码选。

2. 换出变量的确定

设 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_m$ 是一组线性独立的向量组，它们对应的基可行解是 $\boldsymbol{X}^{(0)}$，即满足约束条

件 $\sum_{i=1}^{m} x_i^{(0)} \boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{b}$，其他的向量 $\boldsymbol{P}_{m+1}, \boldsymbol{P}_{m+2}, \cdots, \boldsymbol{P}_{m+t}, \cdots, \boldsymbol{P}_n$ 都可以用 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_m$ 线性表示。若确定非基变量 $\boldsymbol{P}_{m+t}$ 为换入变量，必然可以找到一组不全为 0 的数（$i = 1, 2, \cdots, m$），使得

$$\boldsymbol{P}_{m+t} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{i,\,m+t} \boldsymbol{P}_i \Rightarrow \boldsymbol{P}_{m+t} - \sum_{i=1}^{m} \beta_{i,\,m+t} \boldsymbol{P}_i = 0 \tag{2-16}$$

在式(2-16)两边同乘一个正数 θ，然后将它加到 $\sum_{i=1}^{m} x_i^{(0)} \boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{b}$ 上，得到

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i^{(0)} - \theta\beta_{i,\,m+t}) \boldsymbol{P}_i + \theta \boldsymbol{P}_{m+t} = \boldsymbol{b} \tag{2-17}$$

当 θ 取适当值时，就能得到满足约束条件的一个可行解（即非零分量的数目不大于 m 个）。就应使 $x_i^{(0)} - \theta\beta_{i,\,m+t}$（$i = 1, 2, \cdots, m$）中的某一个为零，并保证其余分量为非负。这个要求可以用如下办法达到：

比较各比值 $\dfrac{x_i^{(0)}}{\beta_{i,\,m+t}}$（$i = 1, 2, \cdots, m$）。$\theta$ 必须是正数，只能选择 $\dfrac{x_i^{(0)}}{\beta_{i,\,m+t}} > 0$（$i = 1, 2, \cdots, m$）中比值最小的等于 θ，即 $\theta = \min\limits_i \left(\dfrac{x_i^{(0)}}{\beta_{i,\,m+t}} \middle| \beta_{i,\,m+t} > 0 \right) = \dfrac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,\,m+t}}$。按最小比值确定 θ 值，称为最小比值规则。

将 $\theta = \dfrac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,\,m+t}}$ 代入 $\boldsymbol{X}$ 中，便得到新的基可行解

$$\boldsymbol{X}^{(1)} = \left(x_1^{(0)} - \frac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,\,m+t}} \beta_{1,\,m+t}, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第}l\text{个分量}}}{0}, \cdots, x_m^{(0)} - \frac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,\,m+t}} \beta_{m,\,m+t}, 0, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第}m+t\text{个分量}}}{\frac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,\,m+t}}}, \cdots, 0 \right)$$

由此，得到由 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 转换到 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 的个分量的转换公式

$$x_i^{(1)} = \begin{cases} x_i^{(0)} - \dfrac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,\,m+t}} \beta_{i,\,m+t} & i \neq l \\[2ex] \dfrac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,\,m+t}} & i = l \end{cases} \tag{2-18}$$

式中，$x_i^{(0)}$ 是原基可行解 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 的各分量；$x_i^{(1)}$ 是新基可行解 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 的各分量；$\beta_{i,\,m+t}$ 是换入向量 $\boldsymbol{P}_{m+t}$ 的对应原来一组基向量的坐标。

$\boldsymbol{X}^{(1)}$ 的 m 个非零分量对应的列向量是否线性独立呢？因 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 的第 l 个分量对应于 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 的相应分量是零，即 $x_l^{(0)} - \theta\beta_{l,\,m+t} = 0$，其中 $x_l^{(0)}$、θ 均不为零，根据 θ 规则（最小比值），$\beta_{l,\,m+t} \neq 0$。$\boldsymbol{X}^{(1)}$ 中的 m 个非零分量对应的 m 个列向量是 $\boldsymbol{P}_j$（$j = 1, 2, \cdots, m, j \neq l$）和 $\boldsymbol{P}_{m+t}$。若这组向量不是线性独立，则一定可以找到不全为零的数 α_j，使得 $\boldsymbol{P}_{m+t} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \boldsymbol{P}_j$（$j \neq l$）成立。又因 $\boldsymbol{P}_{m+t} = \sum_{j=1}^{m} \beta_{j,\,m+t} \boldsymbol{P}_j$，两式相减可得

$$\sum_{m} (\beta_{j,\,m+t} - \alpha_j) \boldsymbol{P}_j + \beta_{l,\,m+t} \boldsymbol{P}_l = 0 \tag{2-19}$$

由于式(2-19)中至少有 $\beta_{l,\,m+t} \neq 0$，所以表明 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_m$ 是线性相关的，这与假设矛盾。

由此可见，$\boldsymbol{X}^{(1)}$ 的 m 个非零分量对应的列向量 $\boldsymbol{P}_j$（$j = 1, 2, \cdots, m, j \neq l$）与 $\boldsymbol{P}_{m+t}$ 是线性独立的，即经过基变换得到的解是基可行解。

实际上，从一个基可行解到另一个基可行解的变换，就是进行一次基变换。从几何意义上讲，就是从可行域的一个顶点转向另一个顶点。

2.2.4 迭代(旋转运算)

上述基可行解的转换方法是用向量方程来描述的，在实际计算时不太方便，因此采用系数矩阵法。对于标准化的线性规划模型，考虑以下形式的约束方程组：

$$\begin{cases} x_1 \quad + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad x_2 \quad + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad x_i \quad + a_{l,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{lk}x_k + \cdots + a_{ln}x_n = b_l \\ \qquad\quad x_m \quad + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mk}x_k + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2-20}$$

设 x_1，x_2，…，x_m 为基变量，对应的系数矩阵是 $m \times m$ 单位矩阵 $\boldsymbol{I}$，它是可行基。令非基变量 x_{m+1}，x_{m+2}，…，x_n 为零，即可得到一个基可行解。若它不是最优解，则要另找一个使目标函数值改进的基可行解。从非基变量中确定 x_k 为换入变量。这时，θ 为

$$\theta = \min_i \left(\frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0 \right) = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

在迭代过程中，θ 可表示为 $\theta = \min_i \left(\frac{b'_i}{a'_{ik}} \middle| a'_{ik} > 0 \right) = \frac{b'_l}{a'_{lk}}$，其中，$b'_i$、$a'_{ik}$ 分别是经过迭代后对应于 b_i、a_{ik} 的元素值。

按 θ 规则确定 x_l 为换出变量，x_k 和 x_l 的系数列向量分别为

$$\boldsymbol{P}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{lk} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_l = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第 } l \text{ 个分量}$$

为了使 x_k 与 x_l 进行对换，须把 $\boldsymbol{P}_k$ 变换为单位向量，这可以通过系数矩阵的增广矩阵进行初等变换来实现，即

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & \cdots & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_k & \cdots & x_n & b \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & & & & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & a_{l,m+1} & \cdots & a_{lk} & \cdots & a_{ln} & b_l \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \end{array} \tag{2-21}$$

(1)将增广矩阵(2-21)式中的第 l 行除以 a_{lk}，得到

$$\left(0, \cdots, 0, \frac{1}{a_{lk}}, 0, \cdots, 0, \frac{a_{l,m+1}}{a_{lk}}, \cdots, 1, \cdots, \frac{a_{ln}}{a_{lk}} \middle| \frac{b_l}{a_{lk}} \right) \tag{2-22}$$

（2）将式(2-22)中 x_k 列的各元素，除 a_{lk} 变换为 1 以外，其他都应变换为零。其他行的变换是将式(2-22)乘以 a_{lk}（$i \neq l$）后，从式(2－21)的第 i 行减去，得到新的第 i 行

$$\left(0,\ \cdots,\ 0,\ -\frac{a_{ik}}{a_{lk}},\ 0,\ \cdots,\ 0,\ a_{i,\ m+1}-\frac{a_{l,\ m+1}}{a_{lk}}a_{ik},\ \cdots,\ 0,\ \cdots,\ a_{ln}-\frac{a_{ln}}{a_{lk}}a_{ik}\ \middle|\ b_i-\frac{b_l}{a_{lk}}a_{ik}\right)$$

由此可得到变换后系数矩阵各元素的变换关系式（a'_{ij}，b'_i 是变换后的新元素）。

$$a'_{ij}=\begin{cases} a_{ij}-\dfrac{a_{lj}}{a_{lk}}a_{ik} & (i \neq j) \\ \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} & (i = l) \end{cases};\ b'_i=\begin{cases} b_i-\dfrac{a_{ik}}{a_{lk}}b_l & (i \neq l) \\ \dfrac{b_l}{a_{lk}} & (i = l) \end{cases}$$

（3）经过初等变换后的新增广矩阵是

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1\cdots -\dfrac{a_{1k}}{a_{lk}}\cdots 0 & a'_{1,\ m+1}\cdots 0\cdots a_{1n} & b'_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots +\dfrac{1}{a_{lk}}\cdots 0 & a'_{l,\ m+1}\cdots 1\cdots a'_{ln} & b'_l \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots -\dfrac{a_{mk}}{a_{lk}}\cdots 1 & a'_{m,\ m+1}\cdots 0\cdots a'_{mn} & b'_m \end{array}\right) \tag{2-23}$$

（4）式(2－23)中 x_1，x_2，…，x_k，…，x_m 的系数列向量构成 $m \times m$ 单位矩阵，它是可行基，当非基变量 x_{m+1}，…，x_1，…，x_n 为零时，就得到一个基可行解 $\boldsymbol{X}^{(1)}$，即

$$\boldsymbol{X}^{(1)}=(b'_1,\ \cdots,\ b'_{l-1},\ 0,\ b'_{l+1},\ \cdots,\ b'_m,\ 0,\ \cdots,\ b'_k,\ 0,\ \cdots,\ 0)^{\mathrm{T}}$$

在上述系数矩阵的变换中，元素 a_{lk} 称为主元素，它所在列称为主元列，它所在行称为主元行。元素 a_{lk} 位置变换后为 1。

【例 2-6】试用上述方法对如下线性规划模型进行基变换。

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. t:}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{2-24}$$

【解】对线性规划模型进行标准化处理，得到

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. t:}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geqslant 0 \end{cases} \tag{2-25}$$

将系数矩阵写成增广矩阵

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right) \end{array}$$

以 x_3、x_4、x_5 为基变量，以 x_1、x_2 为非基变量，令 x_1、$x_2=0$，可得到一个基可行解

$$\boldsymbol{X}^{(0)}=(0,0,8,16,12)^{\mathrm{T}}$$

现用 x_2 替换 x_5，于是将 x_3、x_4、x_2 的系数矩阵变换为单位矩阵，经变换后为

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 3 \end{array}\right)$$

令非基变量 x_1、$x_5=0$，得到新的基可行解 $\boldsymbol{X}^{(1)}=(0,3,2,16,0)^{\mathrm{T}}$。同理，可以获得其他的基变量及其相应的基解。

2.2.5 单纯形法求解

单纯形法求解线性规划模型的思路如下：

首先，对任何线性规划模型进行标准化处理，找到初始可行基。

其次，判断对应初始可行基的基可行解是否为最优解，如果是最优解，则模型求解结束；如果不是最优解，则需要进行迭代。

最后，进行迭代，即进基和出基过程，对每次获得的解进行判断，直到满足最优解的终止条件为止。

【例 2-7】用单纯形法求解【例 2-6】。

【解】基于上述线性规划模型的标准型，系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4,\boldsymbol{P}_5)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中，x_3、x_4、x_5 的系数列向量（$\boldsymbol{P}_3$，$\boldsymbol{P}_4$，$\boldsymbol{P}_5$）线性独立，构成一个基 $\boldsymbol{B}$，其对应的基变量为 x_3、x_4、x_5，于是，基变量可以表示为

$$\begin{cases} x_3=8-x_1-2x_2 \\ x_4=16-4x_1 \\ x_5=12-4x_2 \end{cases}$$

将其代入目标函数中，得到 $z=0+2x_1+3x_2$。令非基变量 $x_1=x_2=0$，有 $z=0$，得到一个基可行解 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(0,0,8,16,12)^{\mathrm{T}}$，工厂没有安排生产产品Ⅰ、Ⅱ；资源都没有被利用。

由于非基变量 x_1、x_2 的系数都是正数，将非基变量变换为基变量，目标函数的值就可能增大，即安排生产产品Ⅰ或Ⅱ，就可以使工厂的利润增加。只要在目标函数的表达式中还存在有正系数的非基变量，表示目标函数值有增加的可能，就将非基变量与基变量进行对换。

一般选择正系数最大的那个非基变量 x_2 为换入变量，将它换入基变量中，同时还要确定基变量中有一个要换出来成为非基变量，并保证 x_3，x_4，$x_5\geqslant 0$。当 $x_1=0$ 时，有

$$\begin{cases} x_3=8-2x_2\geqslant 0 \\ x_4=16\geqslant 0 \\ x_5=12-4x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

于是，当 $x_2=\min(8/2,-,12/4)=3$ 时，才能使 x_3，x_4，$x_5\geqslant 0$；当 $x_2=3$ 时，基变量 $x_5=0$，即 x_5 最可能成为非基变量，用 x_2 去替换 x_5。于是有

$$\begin{cases} x_3 + 2x_2 = 8 - x_1 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ 4x_2 = 12 - x_5 \end{cases}$$

用高斯消去法，即可得到

$$\begin{cases} x_3 = 2 - x_1 + \dfrac{1}{2}x_5 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_2 = 3 - \dfrac{1}{4}x_5 \end{cases}$$

将其代入目标函数，有 $z = 9 + 2x_1 - \dfrac{3}{4}x_5$ 。

令非基变量 $x_1 = x_5 = 0$ ，得到 $z = 9$ ，并得到另一个基可行解 $\boldsymbol{X}^{(1)} = (0, 3, 2, 16, 0)^{\mathrm{T}}$。

由于非基变量 x_1 的系数是正的，说明目标函数值还可以增大，$\boldsymbol{X}^{(1)}$ 不是最优解。再确定换入、换出变量，继续迭代，得到另一个基可行解 $\boldsymbol{X}^{(2)} = (2, 3, 0, 8, 0)^{\mathrm{T}}$ 。再经过一次迭代，得到一个基可行解 $\boldsymbol{X}^{(3)} = (4, 2, 0, 0, 4)^{\mathrm{T}}$ 。此时，目标函数的表达式是

$$z = 14 - 1.5x_3 - 0.125x_4$$

所有非基变量 x_3、x_4 的系数都是负数。这说明若要用剩余资源 x_3、x_4 ，就必须支付附加费用。当 $x_3 = x_4 = 0$ ，即不再利用这些资源时，目标函数达到最大值。所以 $\boldsymbol{X}^{(3)}$ 是最优解。即当产品Ⅰ生产 4 件、产品Ⅱ生产 2 件时，工厂才能得到最大利润。

通过上例，可以了解利用单纯形法求解线性规划问题的思路。该线性规划问题是二维的，即两个变量 x_1，x_2 ；当加入松弛变量 x_3，x_4，x_5 后，变换为高维的，这时满足所有约束条件的可行域是高维空间的凸多面体（凸集）。这个凸多面体上的顶点，就是基可行解。

2.3 表格单纯形法

为了书写规范和便于计算，设计了单纯形表。每一次迭代对应一张单纯形表，含初始基可行解的单纯形表称为初始单纯形表，含最优解的单纯形表称为最终单纯形表。本节介绍用单纯形表计算线性规划问题的步骤。

2.3.1 单纯形表设计

为了便于理解计算关系，设计一种计算表，称为单纯形表，其功能与增广矩阵相似。将式(2-21)与目标函数组成 $n + 1$ 个变量、$m + 1$ 个方程的方程组，即

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad & + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 \qquad & + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \qquad\qquad \vdots \\ x_m & + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ -z + c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m & + c_{m+1}x_{m+1} + \cdots + c_nx_n = 0 \end{aligned}$$

为了便于迭代运算，可将上述方程组写成增广矩阵

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} -z & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccc|c} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\ 1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_m & c_{m+1} & \cdots & c_n & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

若将 z 看作不参与基变换的基变量，它与 x_1，x_2，…，x_m 的系数构成一个基，这时可采用行初等变换将 c_1，c_2，…，c_m 变换为零，使其对应的系数矩阵为单位矩阵，得到

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} -z & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccc|c} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{m+1} - \sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_{i,m+1} & \cdots & c_n - \sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_{in} & -\sum\limits_{i=1}^{m} c_i b_i \end{array}\right) \end{array}$$

可根据上述增广矩阵设计计算表，见表 2-4。

表 2-4 单纯形表

$c_j \rightarrow$			c_1	…	c_m	c_{m+1}	…	c_n	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n	
c_1	x_1	b_1	1	…	0	$a_{1,m+1}$	…	a_{1n}	θ_1
c_2	x_2	b_2	0	…	0	$a_{2,m+1}$		a_{2n}	θ_2
⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮	…	⋮	⋮
c_m	x_m	b_m	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{mn}	θ_m
$-z$		$-\sum\limits_{i=1}^{m} c_i b_i$	0	…	0	$c_{m+1} - \sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_{i,m+1}$	…	$c_n - \sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_{in}$	

X_B 列中填入基变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$；C_B 列中填入基变量的价值系数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$，它们是与基变量相对应的；b 列中填入约束方程组右端的常数；c_1 行中填入基变量的价值系数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$；q_i 列的数字是在确定换入变量后，按 θ 计算后填入；最后一行称为检验数行，对应各非基变量 x_j 的检验数 $\sigma_j\left(c_j - \sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_{ij}, j = 1, 2, \cdots, n\right)$。

表 2-4 称为初始单纯形表，每迭代一步构造一个新单纯形表。

2.3.2 表格单纯形法计算步骤

（1）线性规划模型的标准化处理。

（2）基于约束方程，确定初始可行基，建立初始单纯形表。

（3）检验各非基变量 x_j 的检验数 σ_j，若所有 $\sigma_j \leqslant 0$（$j = m+1, \cdots, n$），则已得到最优解，可停止计算，否则转入下一步。

（4）在 $\sigma_j > 0(j = m+1, \cdots, n)$ 中，如果某个 σ_k 对应 x_k 的系数列向量 $\boldsymbol{P}_k \leqslant 0$，则此问题有无界解，停止计算，否则转入下一步。

（5）根据 $\max(\sigma_j>0)=\sigma_k$，确定 x_k 为换入变量，按 θ 规则计算，即

$$\theta=\min\left(\frac{b_i}{a_{ik}}\middle| a_{ik}>0\right)=\frac{b_l}{a_{lk}}$$

可确定 x_l 为换出变量，转入下一步。

（6）以 a_{lk} 为主元素进行迭代（即用高斯消去法或称为旋转运算），把 x_k 所对应的列向量变换为

$$\boldsymbol{P}_k=\begin{pmatrix}a_{1k}\\a_{2k}\\\vdots\\a_{lk}\\\vdots\\a_{mk}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{变换为}}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\leftarrow\text{第 } l \text{ 行}$$

将 X_B 列中的 x_l 换为 x_k，得到新的单纯形表。

重复步骤（3）~步骤（6），直到所有的非基变量检验数均小于零。

【例 2-8】用表格单纯形法求解【例 2-6】。

【解】（1）首先将线性规划模型化成标准型，即

$$\max z=2x_1+3x_2$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=8\\4x_1+x_4=16\\4x_2+x_5=12\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}$$

（2）取松弛变量 x_3，x_4，x_5 为基变量，它对应的单位矩阵为基。这就得到初始基可行解

$$\boldsymbol{X}^{(0)}=(0,0,8,16,12)^{\mathrm{T}}$$

将有关数字填入表中，得到初始单纯形表，见表 2-5。

表中左上角的 c_j 是表示目标函数中各变量的价值系数。在 C_B 列填入初始基变量的价值系数,它们都为零。其中基变量检验数均为零,各非基变量的检验数为

$$\sigma_1=c_1-z_1=2-(0\times1+0\times4+0\times0)=2$$
$$\sigma_2=c_2-z_2=3-(0\times2+0\times0+0\times4)=3$$

（3）因检验数都大于零，且 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$ 有正分量存在，转入下一步。

表 2-5　初始单纯形表

$c_j\rightarrow$			2	3	0	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	8	1	2	1	0	0	4
0	x_4	16	4	0	0	1	0	—
0	x_5	12	0	[4]	0	0	1	3
$-z$		0	2	3	0	0	0	

（4）$\max(\sigma_1,\sigma_2)=\max(2,3)=3$，对应的变量 x_2 为换入变量，计算 θ 得

$$\theta=\min\left(\frac{b_i}{a_{i2}}\middle| a_{i2}>0\right)=\min(8/2,-,12/4)=3$$

它所在行对应的 x_5 为换出变量。x_2 所在列和 x_5 所在行交叉处的［4］称为主元素。

(5)以［4］为主元素进行旋转运算，即初等行变换，使 $\boldsymbol{P}_2$ 变换为 $(0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ 在 X_{B} 列中用 x_2 替换 x_5，于是得到新表 2-6。

表 2-6 单纯形表(一)

$c_j \to$			2	3	0	0	0	θ_i
C_{B}	X_{B}	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	2	[1]	0	1	0	-0.5	2
0	x_4	16	4	0	0	1	0	4
3	x_2	3	0	1	0	0	1	—
$-z$		9	2	0	0	0	-0.75	

于是得到新的基可行解 $\boldsymbol{X}^{(1)} = (0, 3, 2, 16, 0)^{\mathrm{T}}$，目标函数的取值 $z = 9$。

(6)检查表 2-6 的所有 $c_j - z_j$，有 $c_1 - z_1 = 2$，说明 x_1 应为换入变量。重复步骤(3)～步骤(5)，得表 2-7。

表 2-7 单纯形表(二)

$c_j \to$			2	3	0	0	0	θ_i
C_{B}	X_{B}	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_1	2	1	0	1	0	-0.5	—
0	x_4	8	0	0	-4	1	[2]	4
3	x_2	3	0	1	0	0	0.25	12
$-z$		-13	0	0	-2	0	0.25	
2	x_1	4	1	0	0	0.25	0	—
0	x_5	4	0	0	-2	0.5	1	4
3	x_2	2	0	1	0.5	-0.125	0	12
$-z$		-14	0	0	-1.5	-0.125	0	

(7)表 2-7 最后一行的所有检验数都已为负或零。这表示目标函数值已不可能再增大，于是得到最优解 $\boldsymbol{X}^{*} = \boldsymbol{X}^{(3)} = (4, 2, 0, 0, 4)^{\mathrm{T}}$，目标函数值 $z^{*} = 14$。

2.3.3 人工变量法

采用单纯形法求解线性规划问题的重要条件之一是能在约束方程中找到单位矩阵，从而构建初始单纯形表。如果在约束方程的系数矩阵中无法找到单位矩阵，则难以采用单纯形法求解。

【例 2-9】试用表格单纯形法求解如下线性规划模型：

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 3 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

【解】将该线性规划模型化成标准型

$$\max z = 3x_1 - x_2 - x_3$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 3 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

其系数矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，无法找到三阶的单位矩阵。

为了找到初始可行基，需要引入人工变量，主要目的是形成单位矩阵。本例中，在第二和第三个约束方程中需要引入人工变量，即可变成

$$\max z = 3x_1 - x_2 - x_3$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

于是，其系数矩阵中可以找到一个初始单位矩阵。

因为人工变量是后加入到原约束条件中的虚拟变量，要求经过基的变换将它们从基变量中逐个替换出来，即所有的人工变量取值必须为零。基变量中不再含有非零的人工变量，则表示原问题有解。若在最终表中当所有 $c_j - z_j \leqslant 0$ ，而在其中还有某个非零人工变量，这表示无可行解。下面介绍两种基于人工变量的单纯形法。

1. 大 *M* 法

该方法的基本思想是：为了使得人工变量的取值为零，假定人工变量在目标函数中的系数为($-M$)(M 为任意大的正数)，这样目标函数要实现最大化时，必须把人工变量从基变量换出，否则目标函数不可能实现最大化。采用大 M 法解【例 2-9】的过程如下。

引入人工变量之后的目标函数为 $\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$ 。

因本例是求 min，用所有 $c_j - z_j \geqslant 0$ 来判别目标函数是否实现了最小化。表 2-8 中的人工变量均为零，故最优解是 $x_1 = 4$，$x_2 = 1$，$x_3 = 9$，$x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$ ，目标函数 $z = -2$ 。

2. 两阶段法

求解含人工变量的线性规划问题时，只能用很大的数来代替 M ，可能造成计算上的错误。此时运用两阶段法求解就显示出了优越性。

第一阶段：不考虑原问题是否存在基可行解，给原线性规划问题加入人工变量，并构造仅含人工变量的目标函数并要求实现最小化。如

表 2-8　基于大 *M* 法的单纯形表

$c_j \rightarrow$			-3	1	1	0	0	M	M	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	1.5
M	x_7	1	-2	0	[1]	0	0	0	1	1
$c_j - z_j$			$-3+6M$	$1-M$	$1-3M$	0	M	0	0	

（续表）

$c_j \to$			-3	1	1	0	0	M	M	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	10	3	-2	0	1	0	0	-1	
M	x_6	1	0	[1]	0	0	-1	1	-2	1
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$		-1	$1-M$	0	0	M	0	$3M-1$		
0	x_4	12	[3]	0	0	1	-2	2	-5	
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	4
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$			-1	0	0	0	1	$M-1$	$M+1$	
-3	x_1	4	1	0	0	0.33	-0.67	0.67	-1.67	
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	
1	x_3	9	0	0	1	0.67	-1.33	1.33	-2.33	
$c_j - z_j$		2	0	0	0	0.32	0.32	$M-0.32$	$M-0.68$	

$$\min w = x_{n+1} + \cdots x_{n+m} + 0x_1 + \cdots + 0x_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1, \cdots, x_{n+m} \geqslant 0 \end{cases}$$

然后用单纯形法求解上述模型，若得到 $w = 0$ ，说明原问题存在基可行解，可以进行第二阶段的计算；否则原问题无可行解，应停止计算。

第二阶段：将第一阶段得到的最终表除去人工变量。将目标函数行的系数，换为原问题的目标函数系数，作为第二阶段计算的初始表。

各阶段的计算方法与一般的单纯形法相同。用两阶段法求解【例 2-9】的过程如下。

先在上述线性规划问题的约束方程中加入人工变量，给出第一阶段的数学模型为

$$\min w = x_6 + x_7$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

用单纯形法求解，见表 2-9。第一阶段求得的结果是 $w = 0$ ，得到的最优解是

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 12, x_5 = x_6 = x_7 = 0$$

表 2-9　第一阶段的单纯形表

$c_j \to$			0	0	0	0	0	1	1	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
1	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	1.5
1	x_7	1	-2	0	[1]	0	0	0	1	1
$c_j - z_j$			6	-1	-3	0	1	0	0	

（续表）

$c_j \to$			0	0	0	0	0	1	1	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	10	3	-2	0	1	0	0	-1	—
1	x_6	1	0	[1]	0	0	-1	1	-2	1
0	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	—
$c_j - z_j$			0	-1	0	0	1	0	3	
0	x_4	12	3	0	0	1	-2	2	-5	
0	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	
0	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	
$c_j - z_j$			0	0	0	0	0	1	1	

因人工变量 $x_6 = x_7 = 0$，所以 $(0, 1, 1, 12, 0)^T$ 是该线性规划问题的基可行解。于是可以进行第二阶段运算。将第一阶段的最终表中的人工变量取消，填入原问题的目标函数的系数，进行第二阶段计算，见表 2-10。于是，最优解为 $x_1 = 4$，$x_2 = 1$，目标函数值 $z = -2$。

表 2-10　第二阶段的单纯形表

$c_j \to$			-3	1	1	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	12	[3]	0	0	1	-2	4
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	—
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	—
$c_j - z_j$			-1	0	0	0	1	
-3	x_1	4	1	0	0	0.33	-0.67	4
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	—
1	x_3	9	0	0	1	0.67	-1.33	—
$c_j - z_j$		2	0	0	0	0.33	0.33	

2.3.4　退化

采用 θ 规则确定换出变量时，可能存在两个以上相同的最小比值，在下一次迭代中就有一个或几个基变量等于零，这就出现退化解。这时换出变量 $x_l = 0$，迭代后目标函数值可能不变。当出现退化时，可能进行多次迭代，而基从 B_1，B_2，…又返回到 B_1，即出现计算过程的循环，从而永远达不到最优解。

尽管计算过程的循环现象极少出现，但还是有可能的。如何解决这个问题？先后有人提出了“摄动法”、“字典序法”。使用最广泛的是 1974 年由勃兰特提出的一种简便规则，称为勃兰特规则：

（1）选取 $c_j - z_j > 0$ 中下标最小的非基变量 x_k 为换入变量，即 $k = \min(j \mid c_j - z_j > 0)$。

（2）当按 θ 规则计算存在两个级以上最小比值时，选取下标最小的基变量为换出变量。

一般而言，按照勃兰特规则计算时，一定能避免出现循环。

2.4　线性规划模型的应用及软件求解

线性规划模型及其求解算法为解决诸多管理学问题提供了很好的理论基础。目前，在管理学科的生产计划、存储管理、运输管理、人事管理、市场营销、财务会计等领域得到了广泛的应用。本节将重点介绍相关应用。

2.4.1 线性规划问题应用

【例 2-10】(资源分配)某公司拟定投资与房地产相关的项目。通过调研，公司发现可以有机会投资三个项目，即建造高层办公楼、建造宾馆和建造购物中心。三个项目都需要该公司在今后四个不同的时期加以投资，第一年预付定金，第一年、第二年和第三年后仍然需要进行投资，同时投资者可以按照一定的比例进行投资和获得相应比例的收益，见表 2-11。

表 2-11 各年投资及收益表 （单位：百万元）

年 份	高层办公楼项目	宾馆项目	购物中心项目
第一年	40	80	90
第二年	60	80	50
第三年	90	80	20
第四年	10	70	60
净现值	45	70	50

公司目前有 2500 万的资金用于投资，一年后，可获得 2000 万，两年后可获得 2000 万，三年后可获得 1500 万元可供投资。该公司要在每个项目中按多少比例投资，才能获得最大的净现值?

【解】首先需要分析目标函数，公司获得的净现值是在三个项目中实现的，因此可设三个项目中的投资比例分别为 x_1，x_2，x_3。按照表 2-11，则不同项目不同年份所需要的累积资金见表 2-12。

表 2-12 各年所需累积资金 （单位：百万元）

年 份	高层办公楼项目	宾馆项目	购物中心项目	资金拥有量
第一年	40	80	90	25
第二年	100	160	140	45
第三年	190	240	160	65
第四年	200	310	220	80

于是，其线性规划模型为

$$\max z = 45x_1 + 70x_2 + 50x_3$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} 40x_1 + 80x_2 + 90x_3 \leqslant 25 \\ 100x_1 + 160x_2 + 140x_3 \leqslant 45 \\ 190x_1 + 240x_2 + 160x_3 \leqslant 65 \\ 200x_1 + 310x_2 + 220x_3 \leqslant 80 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

【例 2-11】(人事安排)某交通公司近期开辟了新的线路，需要招聘相应的员工。不同时间段需要的员工数量不同。公司设计了表 2-13 所示的四种排班方式，要求每个员工每天上班 8 小时。如何合理安排员工，可使得总的人工费支出最少。

表 2-13 排班计划表

时间段	排班 1	排班 2	排班 3	排班 4	最少需要人数
6:00 ~ 8:00	√				47
8:00 ~ 10:00	√	√			66

（续表）

时间段	排班 1	排班 2	排班 3	排班 4	最少需要人数
10:00 ~ 12:00	√	√			54
12:00 ~ 14:00	√	√	√		86
14:00 ~ 16:00		√	√	√	60
16:00 ~ 18:00			√	√	34
18:00 ~ 20:00			√	√	40
20:00 ~ 22:00				√	30
每人每天工资（元）	200	170	150	146	

【解】本例的目标是合理安排员工使得费用最少，而费用与排班模式是相关的，故令四种排班模式下的人数分别为 x_1，x_2，x_3，x_4 。各个不同时段的排班人数之和为该时段的总人数，考虑到时段 8∶00 ~ 10∶00 和 10∶00 ~ 12∶00 均为排班 1、2 的安排员工，故取其最大值即可。因此，线性规划模型可以表示为

$$\max z = 200x_1 + 170x_2 + 150x_3 + 146x_4$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} x_1 \geqslant 47 \\ x_1 + x_2 \geqslant 66 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 86 \\ x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 60 \\ x_3 + x_4 \geqslant 40 \\ x_4 \geqslant 30 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

本例中，通常还需要所有的变量取整数。

【例 2-12】（生产计划）某公司生产甲、乙、丙三种产品，都需要经过铸造、机加工和装配三个车间的生产。甲、乙两种产品的铸件可以外包协作，亦可以自行生产，但产品丙必须在本厂铸造才能保证质量，数据见表 2-14。公司为了获得最大利润，甲、乙、丙三种产品应各生产多少件？甲、乙两种产品的铸造中，由本公司铸造和由外包协作各应多少件？

表 2-14　生产工艺数据表

	甲	乙	丙	资源限制
铸造工时/（h/件）	5	10	7	8000
机加工工时/（h/件）	6	4	8	12000
装配工时/（h/件）	3	2	2	10000
自产铸件成本/（元/件）	3	5	4	
外协铸件成本/（元/件）	5	6	- -	
机加工成本/（元/件）	2	1	3	
装配成本/（元/件）	3	2	2	
产品售价/（元/件）	23	18	16	

【解】本例的目标是利润最大，而利润为产品收入减去成本。由于铸件分为自产和外包，需要对其进行分别假设。设 x_1、x_2、x_3 分别为三道工序都由本公司加工的三种产品的件数，x_4、x_5 分别为由外协铸造再由本公司机加工和装配的甲、乙两种产品的件数。线性模型为：

$$\max z = 15x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 13x_4 + 9x_5$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}5x_1 + 10x_2 + 7x_3 \leqslant 8000\\ 6(x_1 + x_4) + 4(x_2 + x_5) + 8x_3 \leqslant 12000\\ 3(x_1 + x_2) + 2(x_3 + x_5) + 3x_4 \leqslant 10000\\ x_1 \geqslant 0,\ i \in (1,\ \cdots,5)\end{cases}$$

【例 2-13】(生产调度)某造船厂根据合同从当年起连续三年各提供四艘规格相同的大型客货轮。该厂这三年内生产大型客货轮的能力及每艘客货轮成本见表 2-15。

表 2-15　造船厂三年内生产大型客货轮的能力及每艘客货轮成本

年　　度	正常生产时间内可完成的客货轮数	加班生产时间内可完成的客货轮数	正常生产时每艘客货轮成本/万元
1	3	3	500
2	5	2	600
3	2	3	500

已知加班生产时，每艘客货轮成本比较正常生产时高出 60 万元；制造出来的客货轮如果当年不交货，每艘积压一年造成的损失为 30 万元。在签定合同时，该厂已积压了 2 艘未交货的客货轮，而该厂希望在第三年末完成合同，还能储存一艘备用。该厂如何安排每年客货轮的生产量，在满足上述各项要求的情况下总的生产费用最少？建立线性规划模型。

【解】假设 x_{ij} 为第 i 年生产，第 j 年交货；x'_{ij} 为加班生产情况，第 i 年生产，第 j 年交货。第一年的 2 艘货轮可以分配在 3 年中，分别为 x_1、x_2、x_3。于是，线性规划模型为

$$\begin{aligned}\min z =\ & 500x_{11} + 560x'_{11} + 530x_{12} + 590x'_{12} + 560x_{13} + 620x'_{13} + 600x_{22} + 660x'_{22} +\\ & 630x_{23} + 690x'_{23} + 500x_{33} + 560x'_{33} + 30x_1 + 60x_2 + 90x_3\end{aligned}$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}x_{11} + x'_{11} + x_1 = 4\\ x_{12} + x'_{12} + x_{22} + x'_{22} + x_2 = 4\\ x_{13} + x'_{13} + x_{23} + x'_{23} + x_{33} + x'_{33} + x_3 = 5\\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \leqslant 3\\ x'_{11} + x'_{12} + x'_{13} \leqslant 3\\ x_{22} + x_{23} \leqslant 5\\ x'_{22} + x'_{23} \leqslant 2\\ x_{33} \leqslant 2\\ x'_{33} \leqslant 3\\ x_{ij},\ x'_{ij} \geqslant 0 \text{ 为整数}(i = 1,\ 2,\ 3;\ j = 1,\ 2,\ 3)\end{cases}$$

【例 2-14】(投资管理)某地区在今后三年内有四种投资机会。

第Ⅰ种是在三年内每年年初投资，年底可获利润 20%，并可将本金收回。

第Ⅱ种是在第一年年初投资，第二年年底可获利润 50%，并将本金收回，但该项投资不得超过 2 万元。

第Ⅲ种是在第二年年初投资，第三年年底收回本金，并获利润 60%，但该项投资不得超过 1.5 万元。

第Ⅳ种是在第三年年初投资，于该年年底收回本金，并获利润 40%，但该项投资不得超过 1 万元。

现在该地区准备拿出 3 万元资金，如何制定投资计划可使得第三年年末的本利和最大?

【解】假设第Ⅰ种每年年初投资量为 x_{11}、x_{12}、x_{13}，第Ⅱ种第一年年初投资量 x_{21}，第Ⅲ种第二年年初投资量为 x_{32}，第Ⅳ种第三年年初投资量为 x_{43}。于是，线性规划模型表示为

$$\max z = 1.2x_{13} + 1.5x_{21} + 1.6x_{32} + 1.4x_{43}$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 30000 \\ x_{12} + x_{32} = 1.2x_{11} \\ x_{13} + x_{43} = 1.2x_{12} + 1.5x_{21} \\ x_{21} \leqslant 20000 \\ x_{32} \leqslant 15000 \\ x_{43} \leqslant 10000 \\ x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{32}, x_{43} \geqslant 0 \end{cases}$$

【例 2-15】(配料计划)某工厂要用三种原料 1、2、3 混合调配出三种不同规格的产品甲、乙、丙，数据见表 2-16、表 2-17。问：该厂如何安排生产可使利润为最大?

表 2-16　配料成分表

产品名称	规格要求	单价/(元/kg)
甲	原材料 1 不少于 50%，原材料 2 不超过 25%	50
乙	原材料 1 不少于 25%，原材料 2 不超过 50%	35
丙	不限	25

表 2-17　资源及价格表

原材料名称	每天最多供应量/kg	单价/(元/kg)
1	100	65
2	100	25
3	60	35

【解】本例的目标是利润最大，利润为三种产品的收入减去三种原材料的成本。由于三种产品中均含有三种原材料，因此假设 x_{ij} 表示第 i 种(甲、乙、丙)产品中原料 j 的含量。

于是，其线性规划模型可以表示为

$$\max z = -15x_{11} + 25x_{12} + 15x_{13} - 30x_{21} + 10x_{22} - 40x_{31} - 10x_{33}$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} 0.5x_{11} - 0.5x_{12} - 0.5x_{13} \geqslant 0 \\ -0.25x_{11} + 0.75x_{12} - 0.25x_{13} \leqslant 0 \\ 0.75x_{21} - 0.25x_{22} - 0.25x_{23} \geqslant 0 \\ -0.5x_{21} + 0.5x_{22} - 0.5x_{23} \leqslant 0 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \leqslant 100 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \leqslant 100 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \leqslant 60 \\ x_{ij} \geqslant 0,\ i, j \in (1, 2, 3) \end{cases}$$

【例 2-16】(投资管理) 某公司决定拿出 1000 万资金用于债券投资，通过甄选，拟定的投资对象是 A、B、C、D、E 五家企业，预计投资回报率分别为 7%、4.5%、5.7%、6%、5%。公司高层要求：对 A 和 B 的投资总额不能超过 120 万，对 B 的投资不能超过 72 万，对 E 的投资不得低于 300 万，对 C 和 D 的投资不能超过对 A 和 B 的投资总和的 68%。如何投资可使得在满足高层要求的情况下收益最大?

【解】本例属于投资收益管理问题。本例的变量比较明确，即投资五家企业的投资量，于是可以假设投资量分别为 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5，其线性规划模型为

$$\max z = 0.07x_1 + 0.045x_2 + 0.057x_3 + 0.06x_4 + 0.05x_5$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 120 \\ x_2 \leqslant 72 \\ x_5 \geqslant 300 \\ x_3 + x_4 \leqslant 0.68(x_1 + x_2) \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

【例 2-17】(物流管理)有一艘货轮，分前、中、后三个舱位，容积与最大允许载重量见表 2 18。

表 2-18 各舱位数据表

	前舱	中舱	后舱
最大允许载重量/ $\times 10^3$ kg	2000	3000	1000
容积/m^3	4000	5400	1000

现在有三种商品待运，有关数据见表 2 19。

表 2-19 待运商品数据表

商品	数量	每件体积/m^3	每件质量/ $\times 10^3$ kg	运价/(元/件)
A	600	10	8	1000
B	1000	5	6	700
C	800	7	5	600

为了航运安全，要求前、中、后舱的实际载重量应大体保持各舱最大允许载重量的比例关系，具体要求前、后舱与中舱载重量的比例与最大允许载重量比例之间偏差分别不超过

15%，前、后舱之间不超过 10%。该货轮应装 A、B、C 各多少件，运费的收入最大？建立线性规划模型。

【解】不同的舱位装载了不同的商品，同时各舱的载重量和容积有一定的限制，故假设 x_{ij} 为第 i 种货物在第 j 舱，其线性规划模型表示为

$$\max z = 1000(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 700(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 600(x_{31} + x_{32} + x_{33})$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leqslant 600 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leqslant 1000 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \leqslant 800 \\ 10x_{11} + 5x_{21} + 7x_{31} \leqslant 4000 \\ 10x_{12} + 5x_{22} + 7x_{32} \leqslant 5400 \\ 10x_{13} + 5x_{23} + 7x_{33} \leqslant 1000 \\ 8x_{11} + 6x_{21} + 5x_{31} \leqslant 2000 \\ 8x_{12} + 6x_{22} + 5x_{32} \leqslant 3000 \\ 8x_{13} + 6x_{23} + 5x_{33} \leqslant 1000 \\ \left|\dfrac{8x_{11} + 6x_{21} + 5x_{31}}{8x_{12} + 6x_{22} + 5x_{32}} - \dfrac{2}{3}\right| \leqslant 0.15 \\ \left|\dfrac{8x_{13} + 6x_{23} + 5x_{33}}{8x_{12} + 6x_{22} + 5x_{32}} - \dfrac{2}{3}\right| \leqslant 0.15 \\ \left|\dfrac{8x_{11} + 6x_{21} + 5x_{31}}{8x_{13} + 6x_{23} + 5x_{33}} - \dfrac{2}{1}\right| \leqslant 0.10 \\ x_{ij} \geqslant 0 \text{ 为整数} \end{cases}$$

【例 2-18】（生产管理）前进拖拉机厂与农机供销社签订了一项生产 100 台某种小型拖拉机的合同。按合同规定，该厂要在今后四个月内每月内各交付一定台数的拖拉机。为此，该厂生产计划科根据本厂实际情况列出了一个生产调度数据表，见表 2-20。根据此表第二栏的数据，该厂能够提前完成合同总台数，但生产出来的拖拉机当月不能交货，每台储存一个月，由于维修保养和积压资金等缘故，另需费用 100 元。该厂应如何拟定最经济的生产进度？

表 2-20　生产调度数据表

月　　份	合同规定交付台数	生产能力/台	单台成本/元
Ⅰ	15	30	5000
Ⅱ	25	35	5200
Ⅲ	35	45	5100
Ⅳ	25	20	5300
合计	100	130	

【解】本例属于生产管理问题。不同月份需要交付不同的拖拉机，同时企业在不同月份的生产能力受到限制，最优的生产进度应该是总成本最小。为此，假设 x_{ij} 表示第 i 月生产用于第 j 月交货的拖拉机的台数，则线性规划模型表示为

$$\min z = 5000x_{11} + 5100x_{12} + 5200x_{13} + 5300x_{14} + 5200x_{22} + 5300x_{23} + 5400x_{24} + 5100x_{33} + 5200x_{34} + 5300x_{44}$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leqslant 30 \\ x_{22} + x_{23} + x_{24} \leqslant 35 \\ x_{33} + x_{34} \leqslant 45 \\ x_{44} \leqslant 20 \\ x_{11} = 15 \\ x_{12} + x_{22} = 25 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 35 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{14} = 25 \\ x_{ij} \geqslant 0 \text{ 为整数} \end{cases}$$

【例 2-19】（采购管理）某疗养院营养师要为某类病人拟定本周菜单。可供选择的蔬菜及其费用和所含影响成分的数量，以及这类病人每周所需各种养分的最低数量见表 2-21。

表 2-21　营养需求表

	每份所含养分数量/mg					每份费用/元
	铁	磷	维生素 A	维生素 C	烟酸	
青豆	0.45	10	415	8	0.3	0.15
胡萝卜	0.45	28	9065	3	0.35	0.15
花菜	1.05	50	2550	53	0.6	0.24
卷心菜	0.4	25	75	27	0.15	0.06
甜菜	0.5	22	15	5	0.25	0.18
土豆	0.5	75	235	8	0.8	0.10
每周养分最低需求量	6.0	325	17500	245	5.0	

另外，为了口味的需求，规定一周内所用卷心菜不多于 2 份，其他蔬菜不多于 4 份。若病人每周需 14 份蔬菜，选用每种蔬菜各多少份？建立线性规划模型。

【解】本例的目标很明确，需要假定的变量即为选择蔬菜的份数。于是，设每周选择上述六种蔬菜分别为 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6 份，其线性规划模型表示为

$$\min w = 0.15x_1 + 0.15x_2 + 0.24x_3 + 0.06x_4 + 0.18x_5 + 0.10x_6$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 14 \\ 0.45x_1 + 0.45x_2 + 1.05x_3 + 0.4x_4 + 0.5x_5 + 0.5x_6 \geqslant 6.0 \\ 10x_1 + 28x_2 + 50x_3 + 25x_4 + 22x_5 + 75x_6 \geqslant 325 \\ 415x_1 + 9065x_2 + 2550x_3 + 75x_4 + 15x_5 + 235x_6 \geqslant 17500 \\ 8x_1 + 3x_2 + 53x_3 + 27x_4 + 5x_5 + 8x_6 \geqslant 245 \\ 0.3x_1 + 0.35x_2 + 0.6x_3 + 0.15x_4 + 0.25x_5 + 0.8x_6 \geqslant 5.0 \\ 0 \leqslant x_4 \leqslant 2 \\ 0 \leqslant x_1, x_3, x_4, x_5, x_6 \leqslant 4 \text{ 为整数} \end{cases}$$

2.4.2　线性规划模型的软件求解

2.4.1 节说明了线性规划模型的图解法、单纯形法和表格单纯形法等具体算法。在现实问题中，有些变量数量较多，而且约束条件也很多，这增加了求解线性规划模型的难度。为此，需要借助于相关的软件工具求解线性规划模型。本节将重点介绍 LINGO 软件和 Excel 软件。

LINGO 软件的安装较为简单，只要下载该安装软件，解压缩之后打开其中“LINGO. exe”文件，在弹出窗口中单击“Later”，后单击“NO”，即可使用。

采用 LINGO 软件计算线性规划模型，只需要将线性规划模型用英文表示出来即可。其中，目标函数和约束条件用“；”隔开，分成不同的行书写并运行即可得到解。要注意的是，采用软件求解线性规划模型，并不需要对线性规划模型进行标准化处理。

通常打开 LINGO 软件之后，会出现如图 2-5 所示界面。

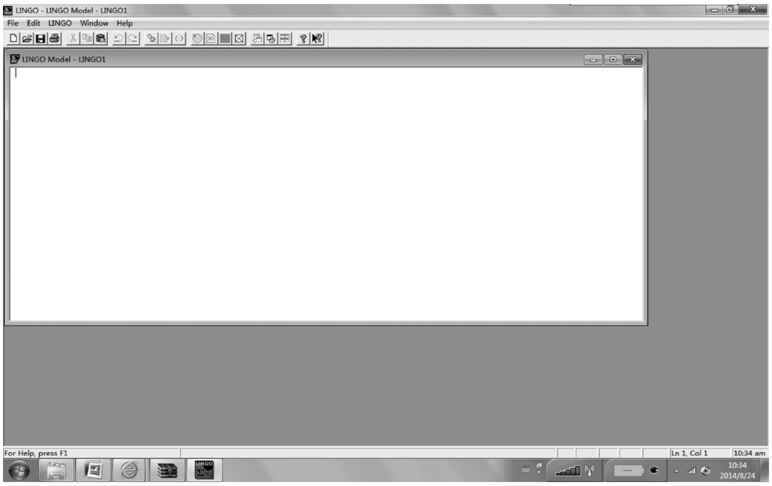


图 2-5

下面以【例 2-6】为例，说明求解方法。线性规划模型为

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. t：}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

在图 2-5 对话框中输入程序，如图 2-6 所示。

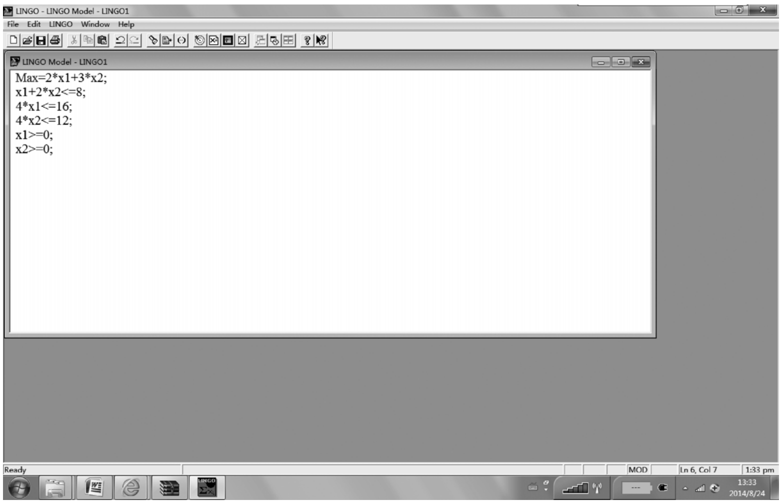


图 2-6

单击上方的“LINGO”菜单中的“Solve”命令项，如图 2-7 所示。

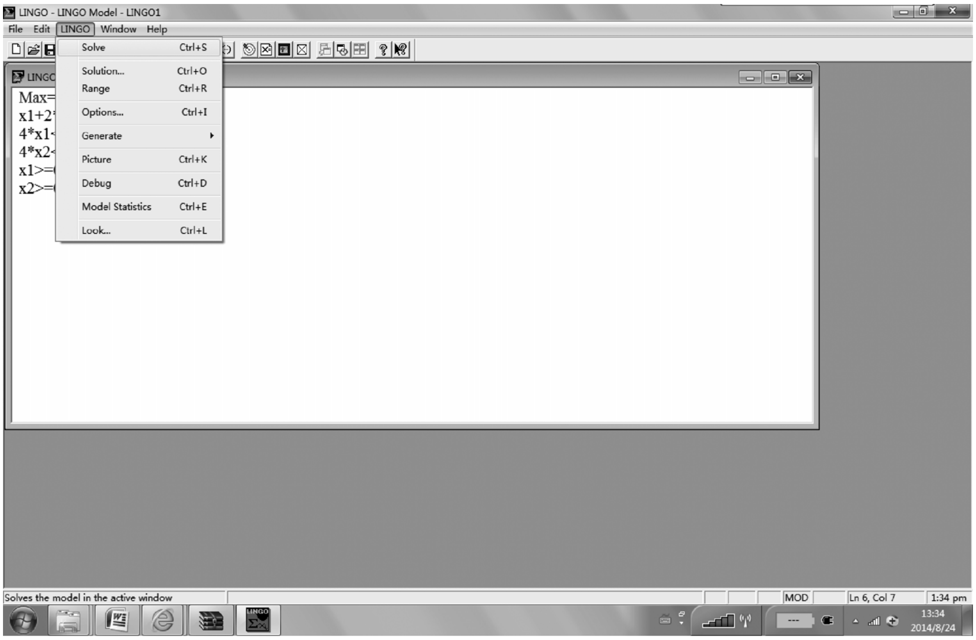


图 2-7

可获得该线性规划问题的最优解，如图 2-8 所示。

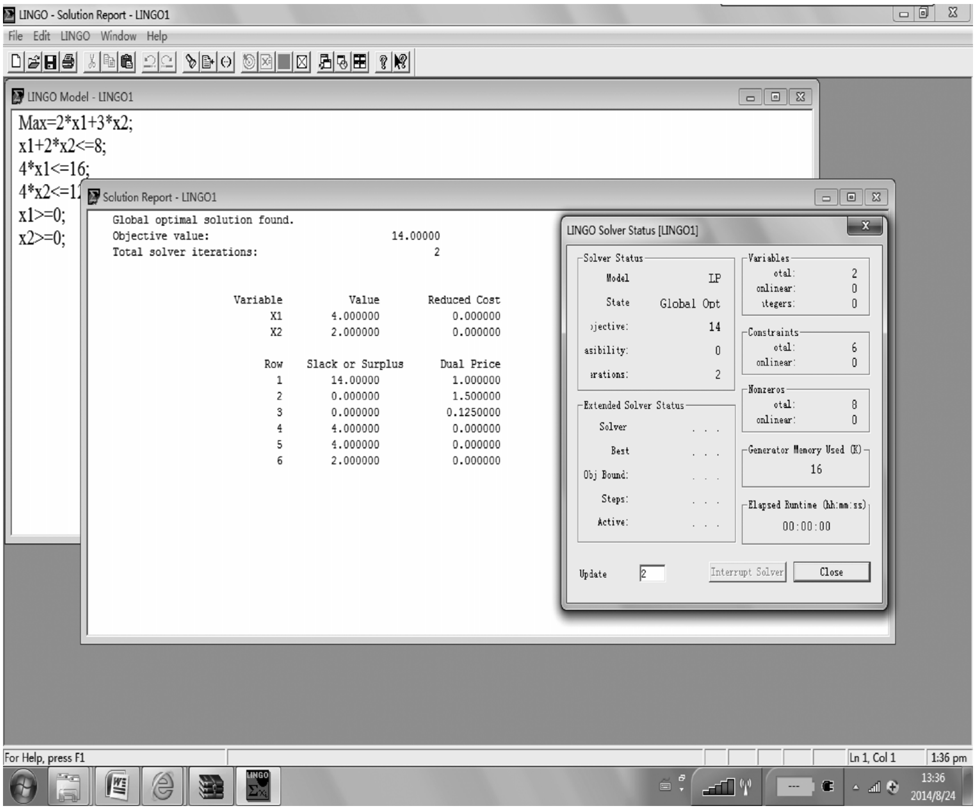


图 2-8

在运行结果显示的“Variable“ 中，$x_1 = 4$，$x_2 = 2$，与单纯形法求解结果一致。

Excel 软件是最常用的文本编辑软件，可以很方便地求解线性规划模型。与 LINGO 软件相同，也不需要对线性规划模型做标准化处理。

运用该软件求解线性规划模型，首先需要打开 Excel 软件，单击“工具”菜单中的“加载宏”命令，如图 2-9 所示。

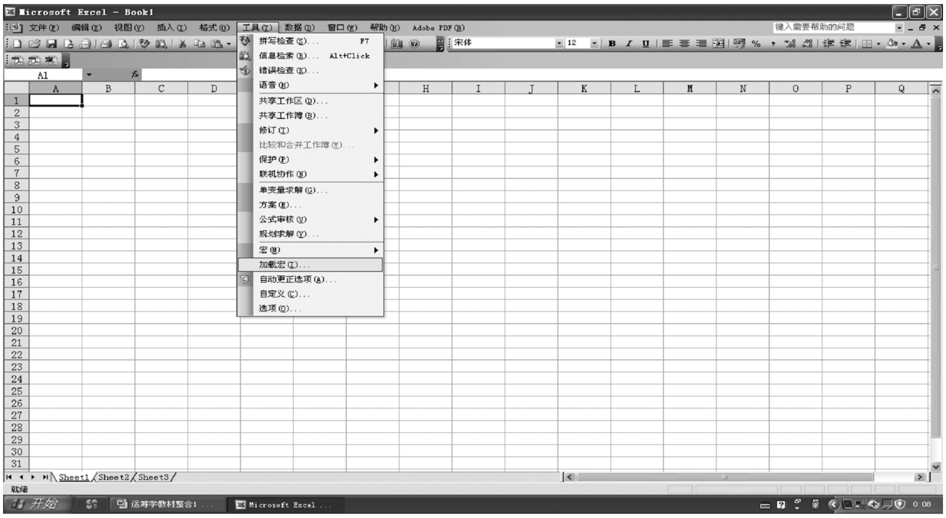


图 2-9

于是便出现“加载宏”对话框，如图 2-10 所示，选中“规划求解”，于是“工具”菜单中就出现了“规划求解”命令项。

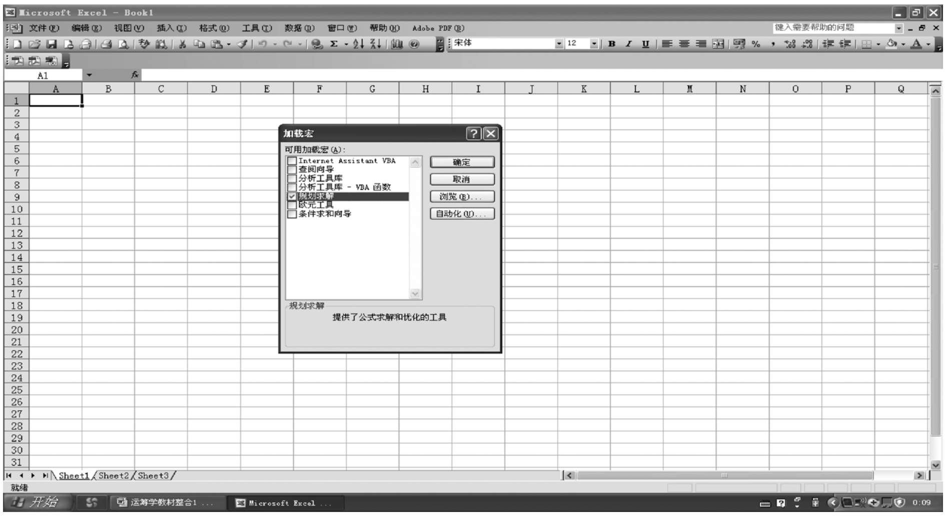


图 2-10

下面将详细介绍求解方法。为了便于理解，在 Excel 中加入了中文说明，实际使用中可以不采用。

(1) 在任意单元格中输入目标函数中的常数(可以事先确定每列表示一个变量)，并在该列下面的空单元格输入约束条件左侧和右侧的常数，输入时需按照变量列输入。输入结果如图 2-11 所示。

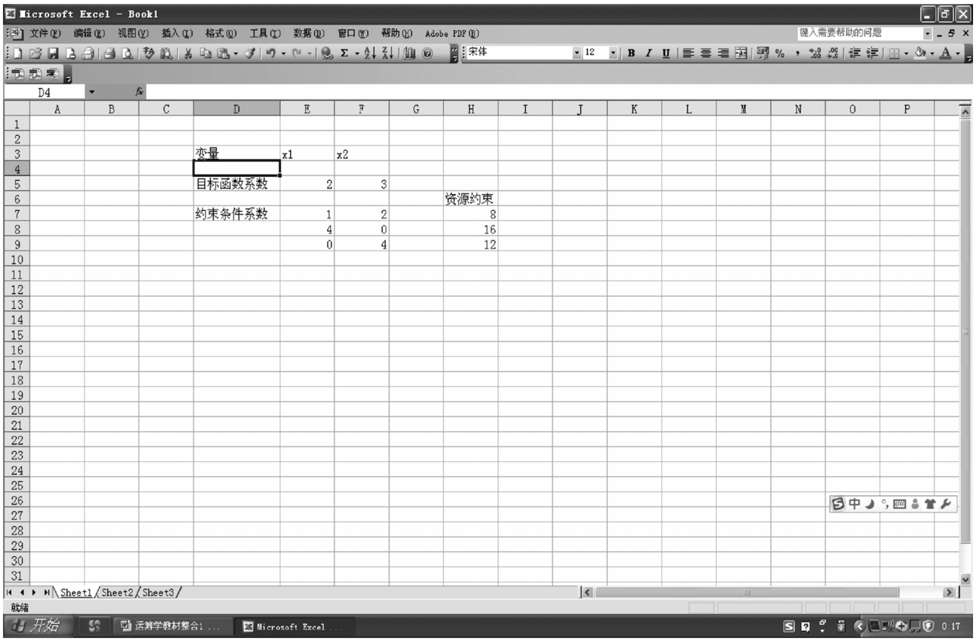


图 2-11

（2）确定可变单元格，即计算机求解结果所填充的单元格。并在相关的空格中输入约束条件的左侧表达式 $x_1 + 2x_2$ 、$4x_1$ 、$4x_2$ ，这个过程可以采用函数 SUMPRODUCT 完成。

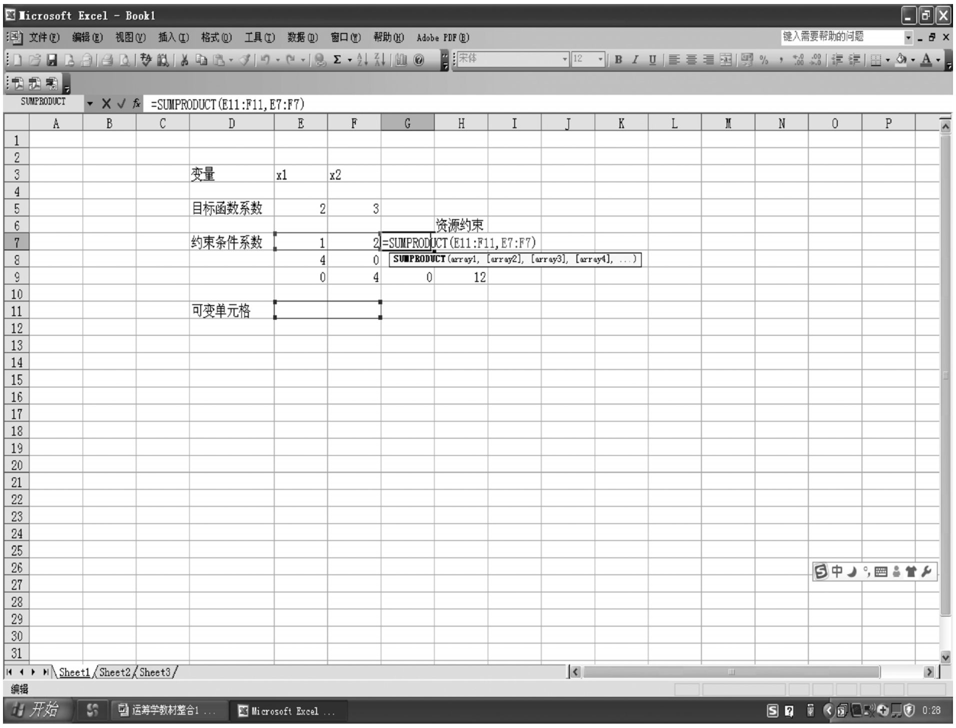


图 2-12

（3）确定目标函数。任意选择某个单元格，将目标函数的常数与可变单元格相乘，即可得到目标函数，如图 2-13 所示。

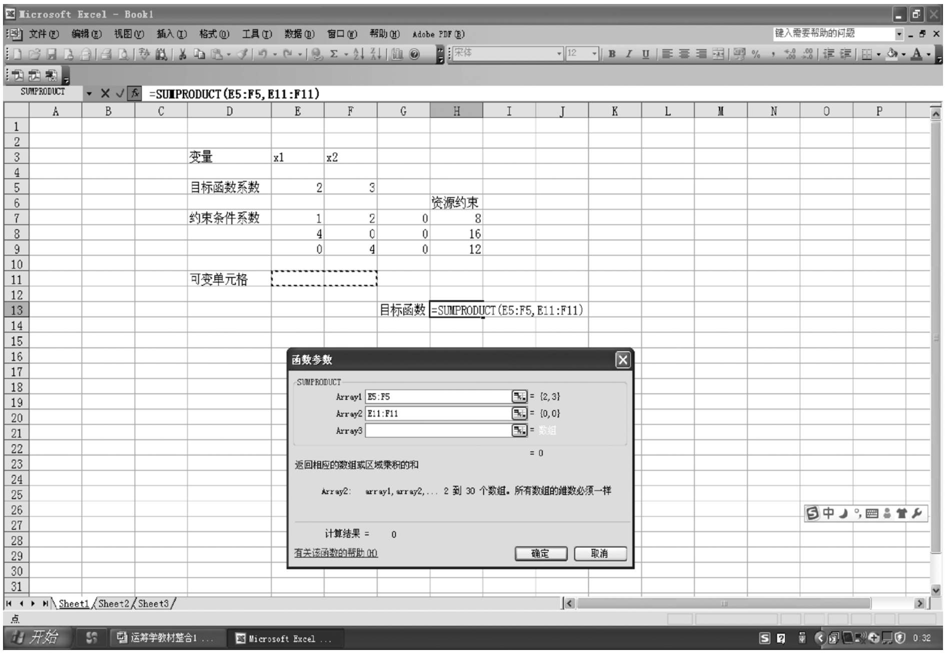


图 2-13

（4）单击“工具”菜单中的“规划求解”命令项，出现“规划求解参数”对话框，输入相应的变量，如图 2-14 所示。

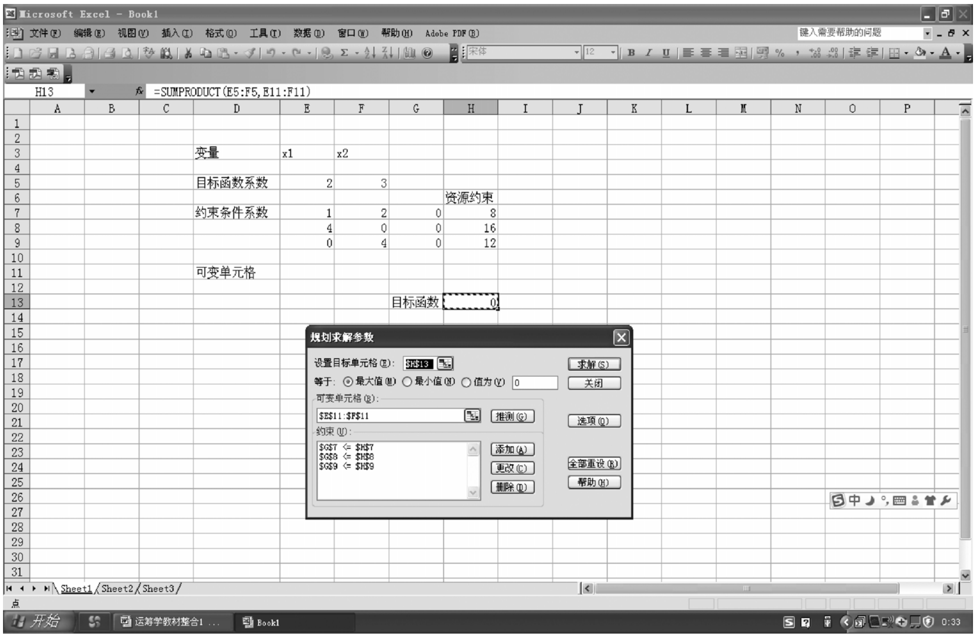


图 2-14

（5）单击“选项”按钮，出现“规划求解选项”对话框，选中“采用线性模型”和“假定非负”，如图 2-15 所示。

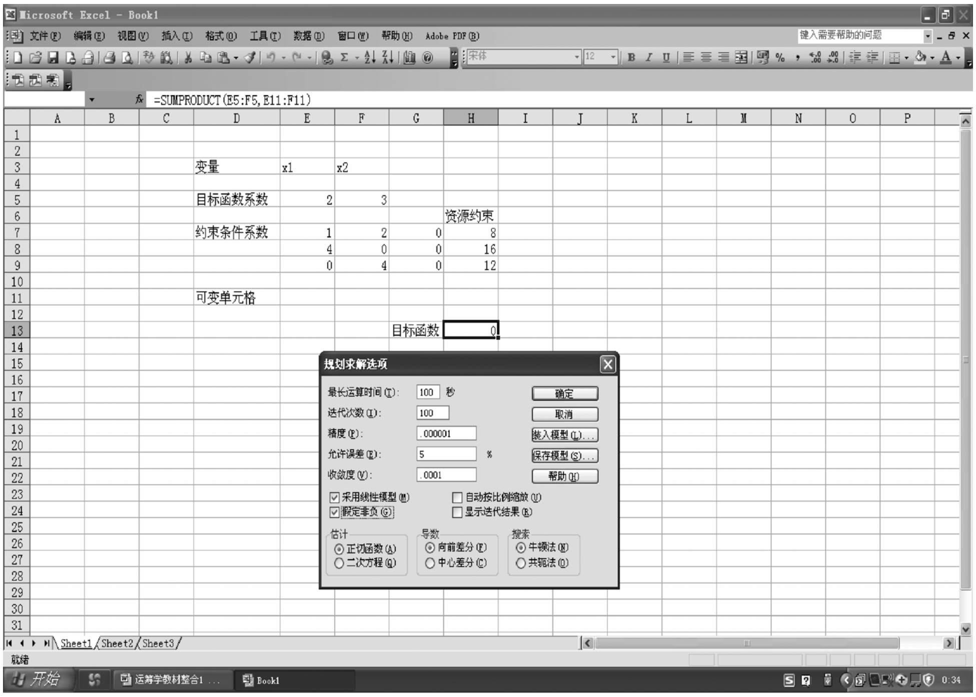


图 2-15

(6)单击“确定”按钮，再单击“求解”按钮，保存规划求解结果，即可获得最优解。求解的结果出现在可变单元格中,如图 2-16 所示。

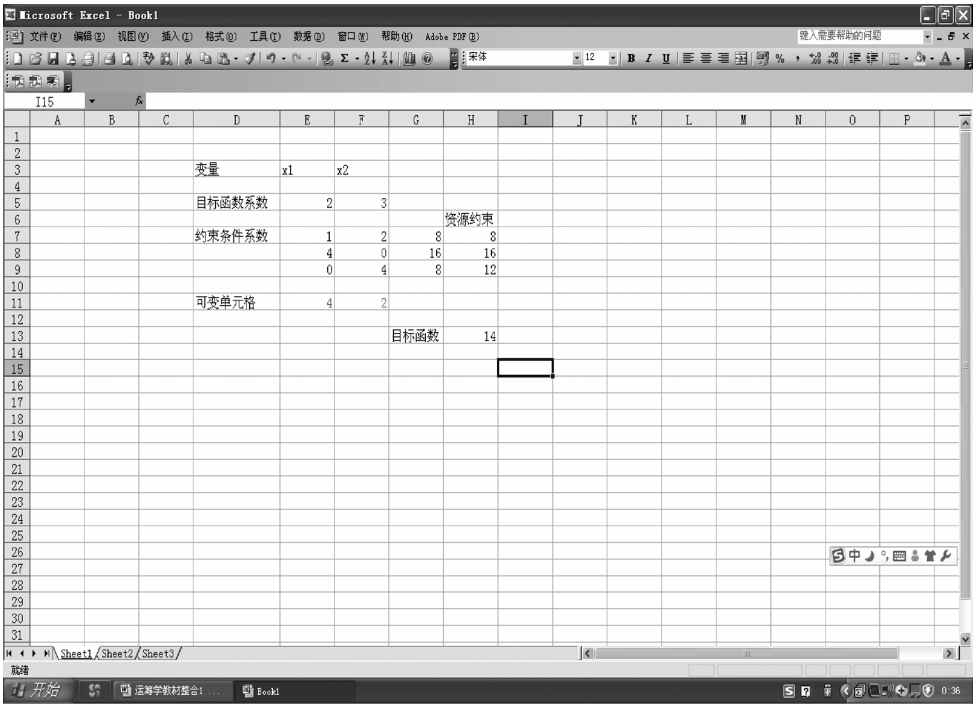


图 2-16

【例 2-20】运用 LINGO 和 Excel 软件求解【例 1-10】中的线性规划模型。

【解】首先将该线性规划模型变成 LINGO 的运行程序，并输入，如图 2-17 所示。

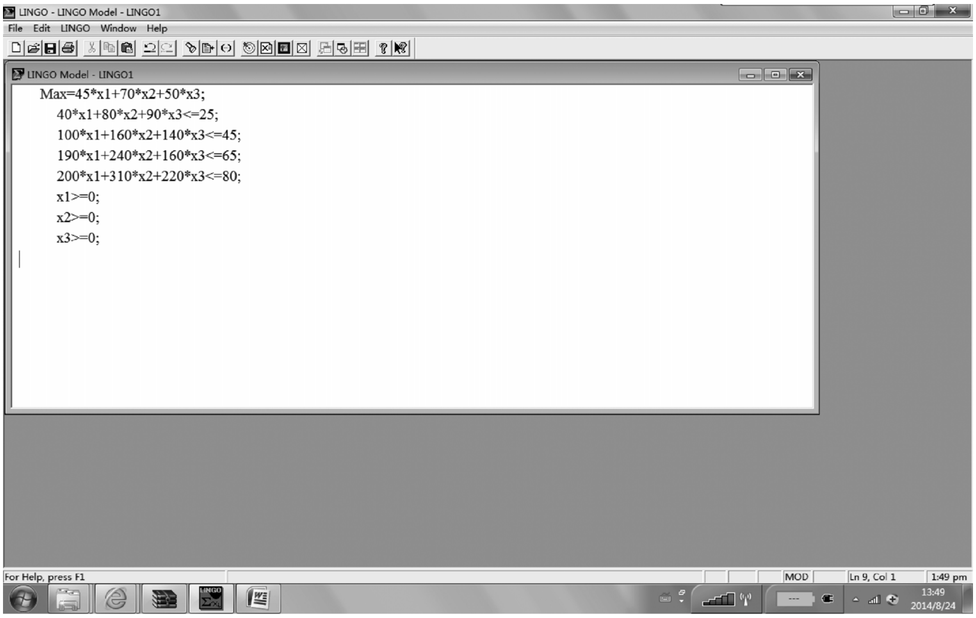


图 2-17

单击“LINGO”菜单中的“Solve”命令项，如图 2-18 所示即可获得最优解。

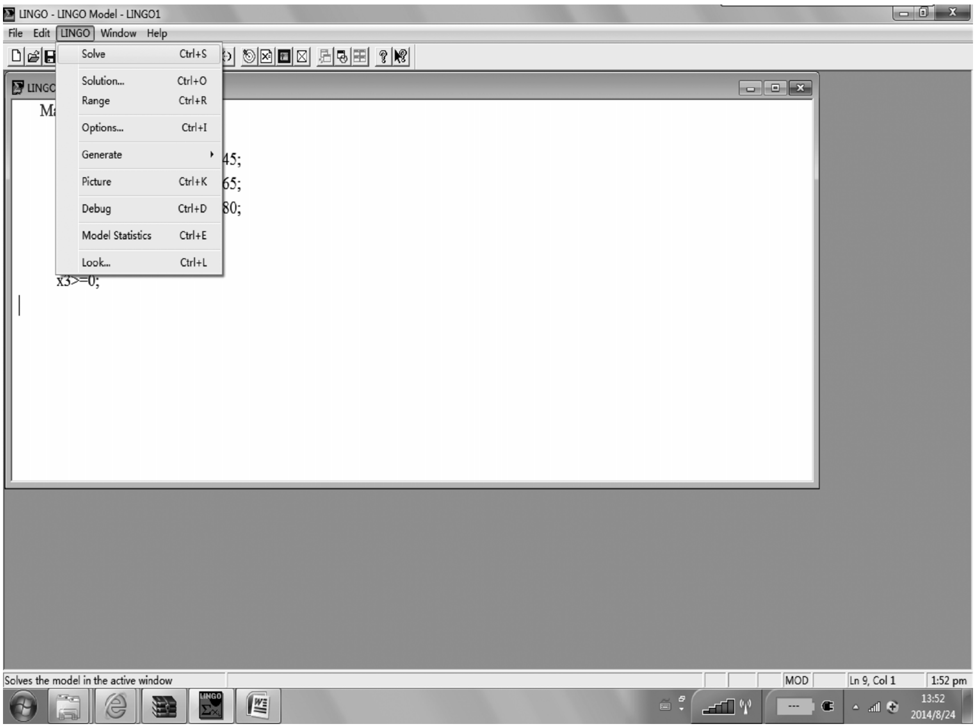


图 2-18

于是，便可输出最优解，如图 2-19 所示。最优解为 $x_1 = 0$，$x_2 = 0.165$，$x_3 = 0.131$，共迭代 6 次，最优目标函数值为 18.1068。

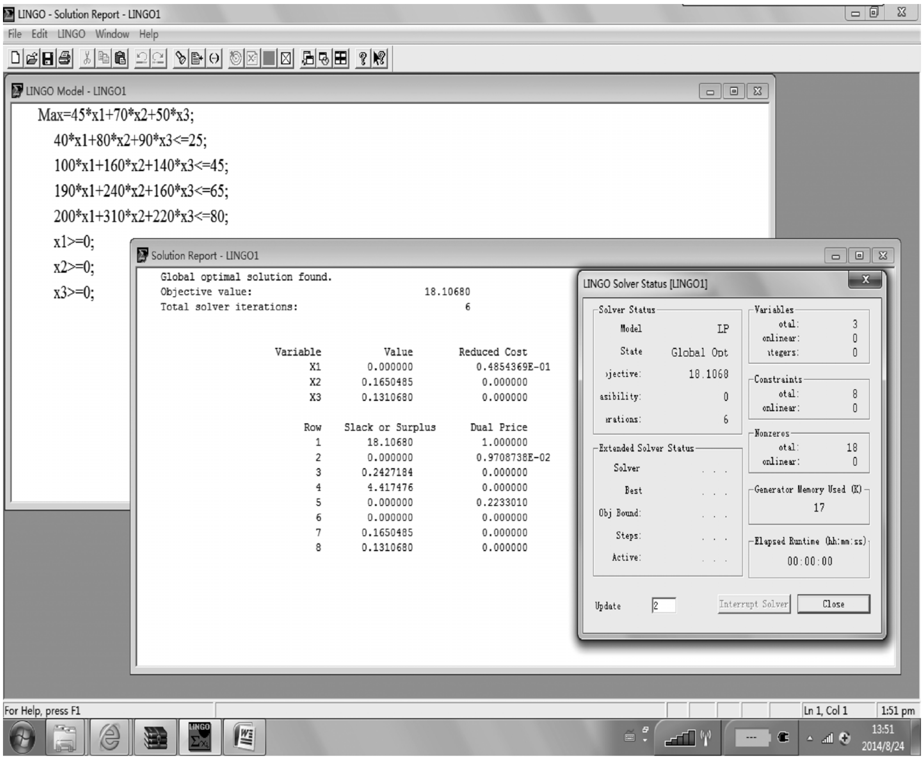


图 2-19

下面介绍运用 Excel 求解该线性规划模型。

输入目标函数和约束条件的常数，并选取任意单元格为可变单元格，如图 2-20 所示。

图 2-20

接着输入约束条件的左侧值，由可变单元格和相应的常量相乘，再将目标函数用同样的方式确定，如图 2-21 所示。

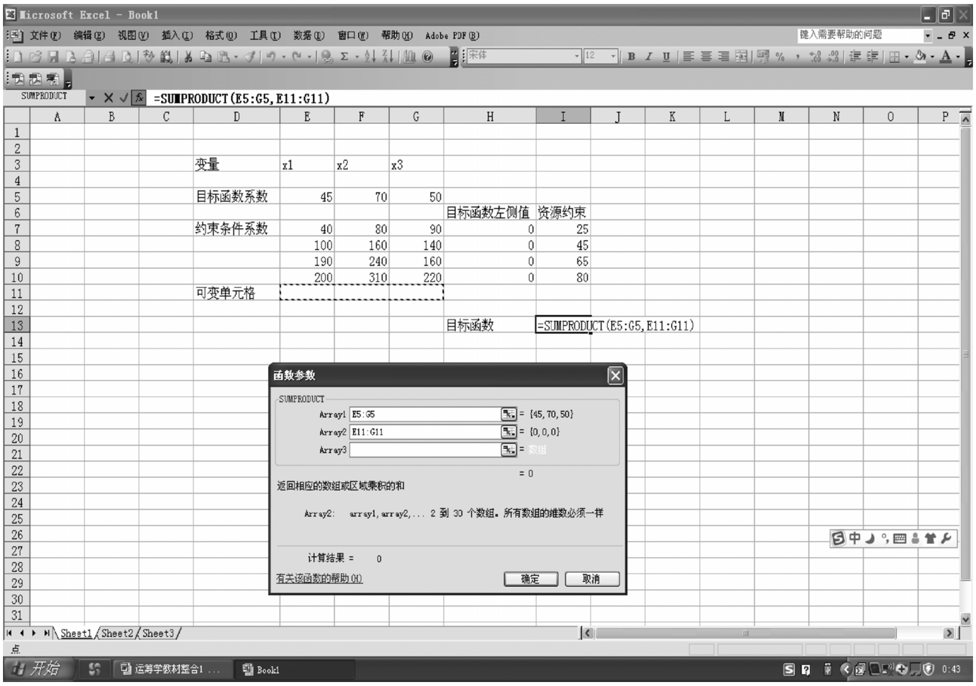


图 2-21

单击“工具”菜单中的“规划求解”命令项，打开“规划求解参数”对话框，输入相应的变量或者不等式，如图 2-22 所示。

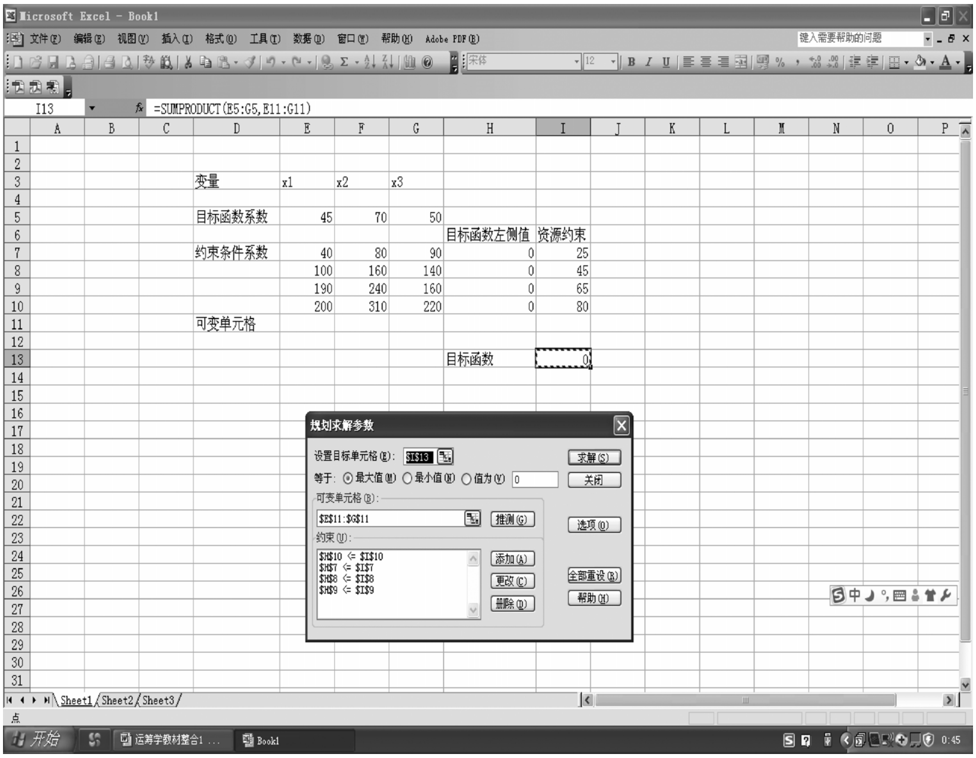


图 2-22

单击“选项”按钮，打开“规划求解选项”对话框，选中“采用线性模型”和“假定非负”，如图 2-23 所示。

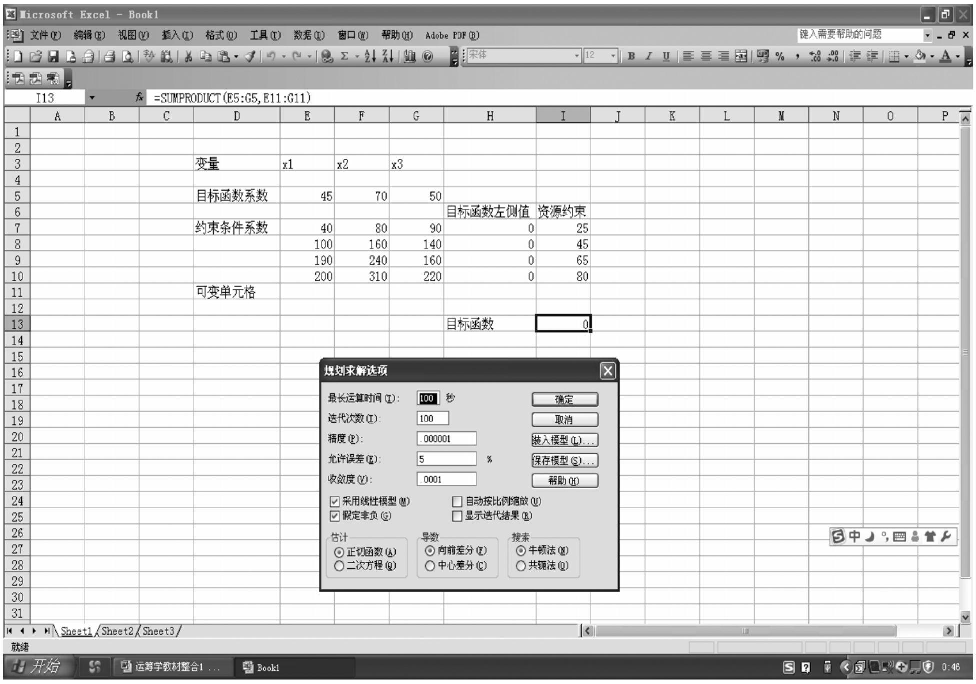


图 2-23

单击“确定”按钮，再单击“求解”按钮，保存求解结果，即可获得最优解。

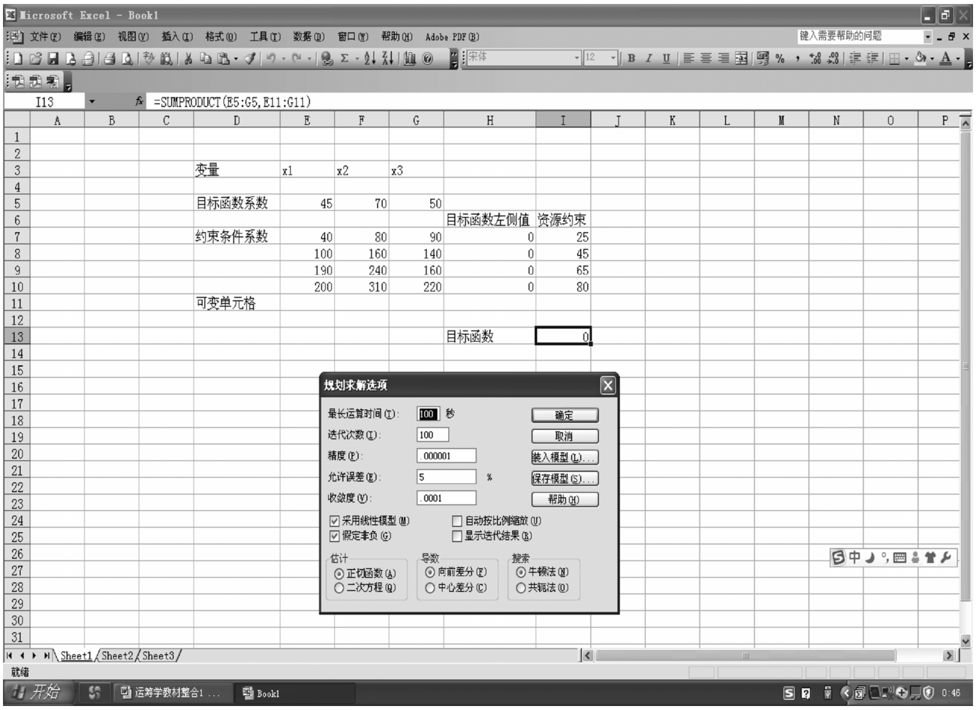


图 2-24

本章要点

在生产经营和资源分配活动中，经常会遇到这样一类问题：如何合理利用有限的各种资源来实现经济利益的最大化。根据实际问题建立相应的线性规划数学模型，可以很直观地运用数学语言来叙述这类问题。同时，可以将线性规划模型变换为标准形式以便于问题的求解。通过对线性规划问题的解的概念的学习，可以明确可行解、基、基可行解、可行基等概念。

通过对线性规划问题的几何意义的讨论可知，线性规划问题的可行域是凸集，凸集的每个顶点对应一个基可行解，基可行解个数是有限的，当然凸集的顶点也是有限的。若线性规划有最优解，必在可行域某顶点上达到，即在有限个基可行解中间存在最优解。

单纯形法是求解线性规划问题最常用的方法，单纯形表是直接求解线性规划问题的工具。掌握单纯形法的计算步骤，学会用人工变量法解决约束条件为“ ≥ ”形式的不等式及等式约束的线性规划问题，将有助于更全面地理解线性规划与单纯形法。

关键公式

- 线性规划问题的标准形式

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, & i = 1, \cdots, m\\ x_j \geqslant 0, & j = 1, 2, \cdots, n\end{cases}$$

在上述标准形式中，规定各约束条件的右端项 $b_i > 0$，具体标准化见表 2-22。

表 2-22　标准化处理表

变量	$x_j \geqslant 0$ $x_j \leqslant 0$ x_j 无约束		不需要处理 令 $x'_j = -x_j$，$x'_j \geqslant 0$ 令 $x_j = x'_j - x''_j$；x'_j，$x''_j \geqslant 0$
约束条件	$b \geqslant 0$ $b < 0$ 约束表达式“ ≤ ” 约束表达式“ = ” 约束表达式“ ≥ ”		不需要处理 约束条件两端同乘 -1 加松弛变量 x_{si} 加人工变量 x_{ai} 减去剩余(松弛)变量 x_{si}，加人工变量 x_{ai}
目标函数	$\max z$ $\min z$ 加入变量的系数	 剩余变量 x_{ri} 松弛变量 x_{si} 人工变量 x_{ai}	不需要处理 令 $z' = -z$，求 $\max z'$ 0 0 $-M$

● 线性规划模型的迭代

$$\max z = \boldsymbol{CX}$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant 0\end{cases}$$

其中，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_n)$；$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A}$ 为约束条件的 $m \times n$ 维系数矩阵，一般 $m < n$；$\boldsymbol{b}$ 为资源向量；$\boldsymbol{C}$ 为价值向量；$\boldsymbol{X}$ 为决策变量向量。

单纯形法各非基变量检验数的公式 $\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$，若 $\sigma_j \leqslant 0$（$j = m+1, \cdots, n$），则已得到最优解，可停止计算。

θ 规则确定换出变量 x_l 的计算公式 $\theta = \min\left(\frac{b_i}{a_{ik}},\ a_{ik} > 0\right) = \frac{b_l}{a_{lk}}$。

案例解析

针对【例 2-1】，按照线性规划建模的基本思想，可以假设 A、B、C、D 这四种产品的产量分别为 x_1、x_2、x_3、x_4，于是，其线性规划模型可以表示为

$$\max z = 9x_1 + 6x_2 + 11x_3 + 8x_4$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 480 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leqslant 2400 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 \leqslant 2000 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 4x_4 \leqslant 3000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

按照单纯形法的求解思路，首先将其标准化处理，得到

$$\max z = 9x_1 + 6x_2 + 11x_3 + 8x_4$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 480 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_6 = 2400 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 + x_7 = 2000 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 4x_4 + x_8 = 3000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geqslant 0 \end{cases}$$

于是，构建单纯形表，其迭代过程见表 2-23。

表 2-23　单纯形表

$c_j \rightarrow$			9	6	11	8	0	0	0	0	θ_i
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
0	x_5	480	1	1	1	1	1	0	0	0	480
0	x_6	2400	4	8	2	5	0	1	0	0	1200

（续表）

$c_j \rightarrow$			9	6	11	8	0	0	0	0	θ_i
$\boldsymbol{C}_{\mathrm{B}}$	$\boldsymbol{X}_{\mathrm{B}}$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
0	x_7	2000	4	2	5	5	0	0	1	0	400
0	x_8	3000	6	4	[8]	4	0	0	0	1	375
$c_j - z_j$		0	9	6	11	8	0	0	0	0	
0	x_5	105	0.25	0.5	0	0.5	1	0	0	-0.125	210
0	x_6	1650	2.5	7	0	4	0	1	0	-0.25	412.5
0	x_7	125	0.25	-0.5	0	[2.5]	0	0	1	-0.625	50
11	x_3	375	0.75	0.5	1	0.5	0	0	0	0.125	750
$c_j - z_j$		4125	0.75	0.5	0	2.5	0	0	0	-1.375	
0	x_5	80	0.2	[0.6]	0	0	1	0	-0.2	0	133
0	x_6	1450	2.1	7.8	0	0	0	1	-1.6	0.75	186
8	x_4	50	0.1	-0.2	0	1	0	0	0.4	-0.25	–
11	x_3	350	0.7	0.6	1	0	0	0	-0.2	0.25	583
$c_j - z_j$		4250	0.5	1	0	0	0	0	-1	-0.75	
6	x_2	133	[0.33]	1	0	0	1.67	0	-0.33	0.00	400
0	x_6	410	-0.50	0	0	0	-13.00	1	1.00	0.75	—
8	x_4	77	0.17	0	0	1	0.33	0	0.33	-0.25	460
11	x_3	270	0.50	0	1	0	-1.00	0	0.00	0.25	540
$c_j - z_j$		4384	0.2	0.0	0.0	0.0	-1.7	0.0	-0.7	-0.8	
9	x_1	400	1	3	0	0	5	0	-1	0	
0	x_6	610	0	2	0	0	-10	1	0	1	
8	x_4	10	0	-1	0	1	-1	0	1	0	
11	x_3	70	0	-2	1	0	-4	0	1	0	
$c_j - z_j$		4450	0.0	-0.5	0.0	0.00	-2.5	0.0	-0.5	-0.75	

如果采用 LINGO 软件求解，将模型转化为以下程序：

```
max =9* x1 +6* x2 +11* x3 +8* x4;
x1 +x2 +x3 +x4 < =480;
4* x1 +8* x2 +2* x3 +5* x4 < =2400;
4* x1 +2* x2 +5* x3 +5* x4 < =2000;
6* x1 +4* x2 +8* x3 +4* x4 < =3000;
x1 > =0;
x2 > =0;
x3 > =0;
x4 > =0;
```

如图 2-25 所示。

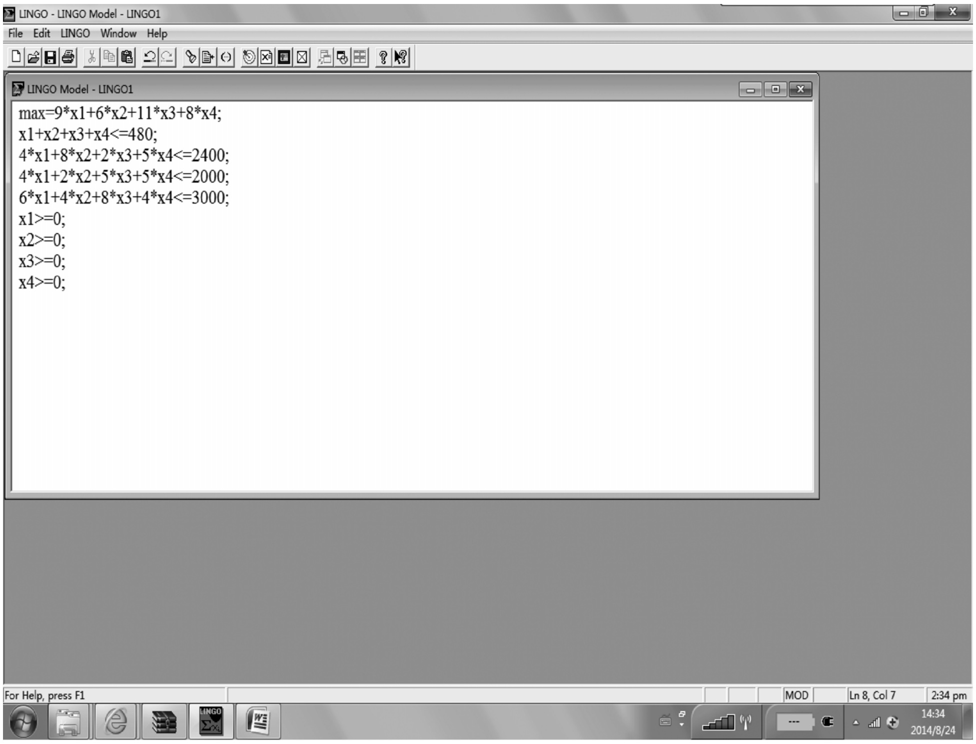


图 2-25

运行 LINGO 程序，如图 2-26 所示。

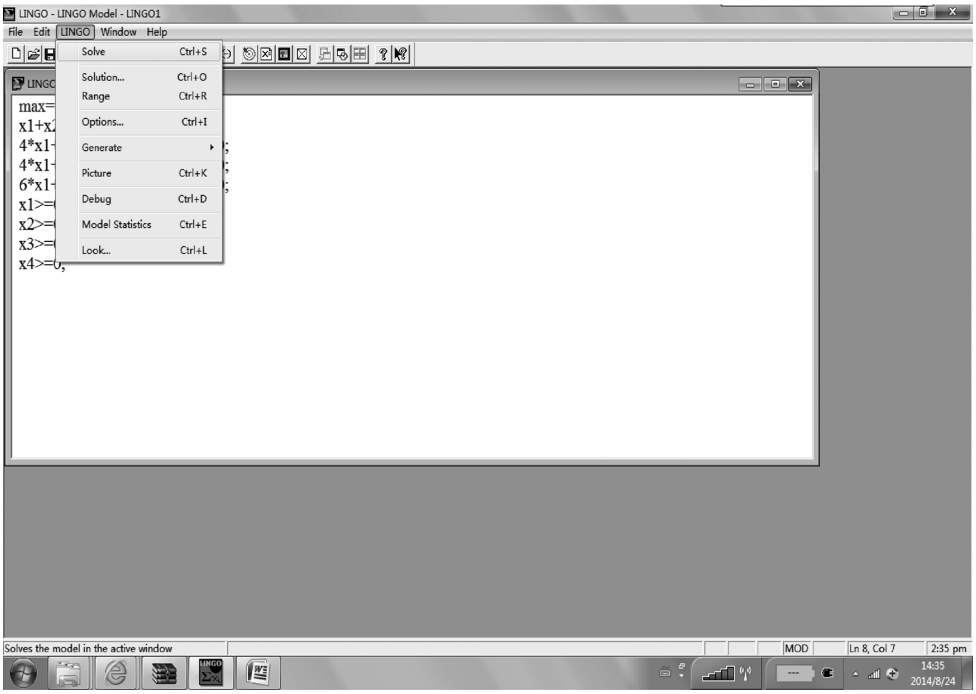


图 2-26

其运行结果如图 2-27 所示。

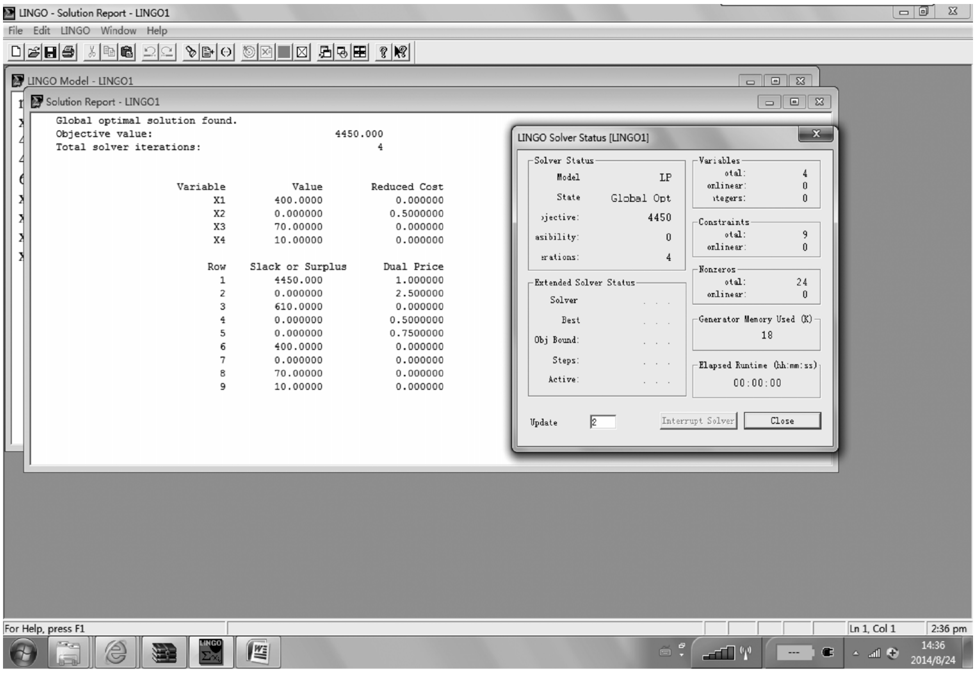


图 2-27

基于运行结果，可知其最优解为 $x_1 = 400$，$x_2 = 0$，$x_3 = 70$，$x_4 = 10$，迭代 4 次，最优值为 4450。

采用 Excel 求解该线性规划问题，首先输入相应的常量，如图 2-28 所示。

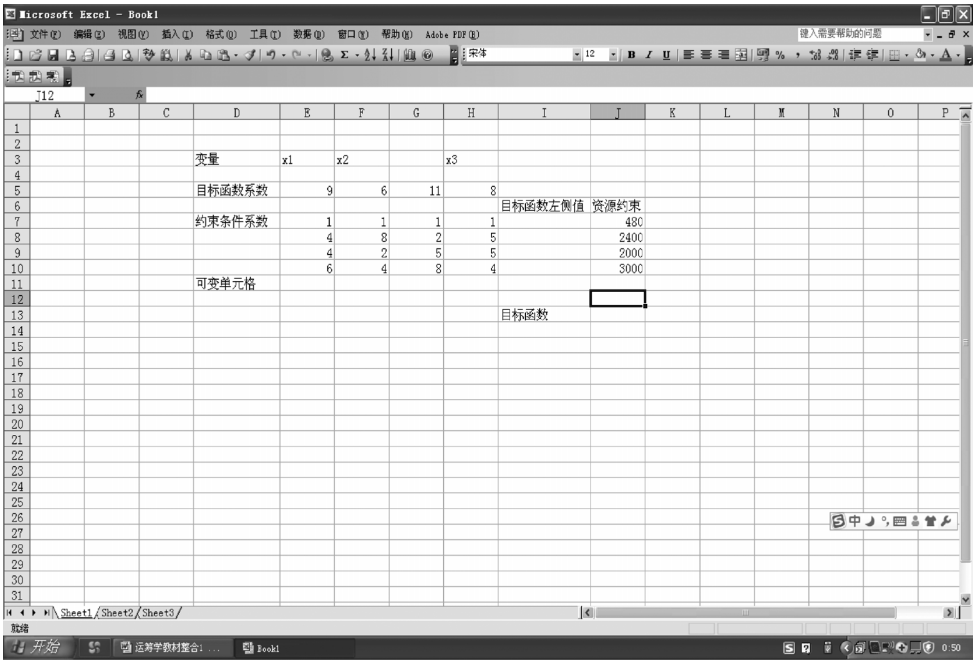


图 2-28

接着，计算目标函数左侧值和目标函数，用 SUMPRODUCT 函数描述，如图 2-29 所示。

图 2-29

然后，单击“工具”菜单中的“规划求解”命令项，打开“规划求解”对话框，输入相应的变量或者表达式，如图 2-30 所示。

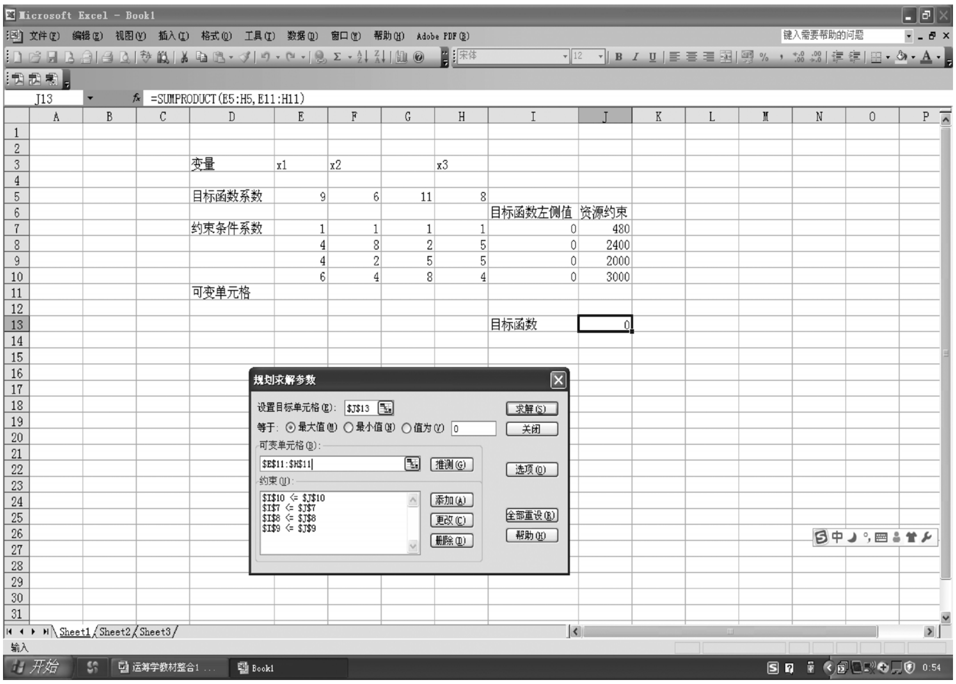


图 2-30

单击“选项”按钮，选中“线性模型”和“假定非负”，单击“确定”，再单击“求解”按钮，保存求解结果，即可获得最优解。

图 2-31

练习题

1. 用图解法求解下列线性规划问题，并指出问题具有唯一最优解、无穷最优解、无界解还是无可行解：

（1）$\min z = 2x_1 + 3x_2$

$$\text{s.t:}\begin{cases}4x_1 + 6x_2 \geqslant 6\\4x_1 + 2x_2 \geqslant 4\\x_1,\ x_2 \geqslant 0\end{cases};$$

（2）$\max z = 3x_1 + 2x_2$

$$\text{s.t:}\begin{cases}2x_1 + x_2 \leqslant 2\\3x_1 + 4x_2 \geqslant 12\\x_1,\ x_2 \geqslant 0\end{cases};$$

（3）$\max z = x_1 + x_2$

$$\text{s.t:}\begin{cases}6x_1 + 10x_2 \leqslant 120\\5 \leqslant x_1 \leqslant 10\\3 \leqslant x_2 \leqslant 8\end{cases};$$

（4）$\max z = 5x_1 + 6x_2$

$$\text{s.t:}\begin{cases}2x_1 - x_2 \geqslant 2\\-2x_1 + 3x_2 \leqslant 2\\x_1,\ x_2 \geqslant 0\end{cases}。$$

2. 用单纯形法求解下列线性规划问题：

（1）$\max z = 10x_1 + 5x_2$

$$\text{s.t:}\begin{cases}3x_1 + 4x_2 \leqslant 9\\5x_1 + 2x_2 \leqslant 8\\x_1,\ x_2 \geqslant 0\end{cases};$$

（2）$\max z = 2x_1 + x_2$

$$\text{s.t:}\begin{cases}5x_2 \leqslant 15\\6x_1 + 2x_2 \leqslant 24\\x_1 + x_2 \leqslant 5\\x_1,\ x_2 \geqslant 0\end{cases}。$$

3. 用大 M 法和两阶段法求解下列线性规划问题，并指出属于哪一类解：

（1）$\max z = 2x_1 - x_2 + 2x_3$

$$\text{s.t:}\begin{cases}x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 6\\-2x_1 + x_3 \geqslant 2\\2x_2 - x_3 \geqslant 0\\x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0\end{cases};$$

（2）$\min z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

$$\text{s.t:}\begin{cases}x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geqslant 8\\3x_1 + 2x_2 \geqslant 6\\x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0\end{cases}。$$

4. 某铸造厂计划生产 1000 kg 铸件，铸件的含量：Mn 不少于 0.45%；Si 在 3.25% ~ 5.50%之间；铸件的售价是 0.45 元/kg。工厂现有 A、B、C 三种铸铁及纯 Mn 块，其规格与价格见表 2-24。浇铸时平均损失铁水费用是 0.005 元/kg。

表 2-24　规格和价格表

材料 含量	A	B	C	Mn 块
Si(%)	4	1	0.6	0
Mn(%)	0.45	0.5	0.4	100
单价/(元/kg)	0.021	0.025	0.015	8

该厂应如何配料，才能得到最大利润？建立该线性规划模型并采用单纯形法求解。

5. 某饲养厂饲养动物出售，设每头动物每天至少需要 700 g 蛋白质、30 g 矿物质、100 mg 维生素。现有五种饲料可供选用，各种饲料每公斤营养成分含量及单价见表 2-25。要求确定既满足动物生长的营养需要，又使费用最省的选用饲料的方案，建立该问题的线性规划模型，并采用单纯形法求解。

表 2-25　营养成分和价格表

饲料	蛋白质/g	矿物质/g	维生素/mg	价格/(元/kg)
1	3	1	0.5	0.2
2	2	0.5	1.0	0.7
3	1	0.2	0.2	0.4
4	6	2	2	0.3
5	18	0.5	0.8	0.8

第 3 章　对偶理论和灵敏度分析

本章概要

学习目标　学完本章后，你将能够：

1. 了解线性规划对偶问题的实际背景。
2. 了解对偶问题的建立规则与基本性质。
3. 掌握对偶最优解的计算及其经济解释。
4. 掌握线性规划的灵敏度分析。

对偶理论和灵敏度分析的例子

斯克林斯工业化学公司在俄亥俄州西南部俄亥俄河附近经营一家精炼厂。公司初级产品生产的化学工程如图 3-1 所示，1 lb(1 lb = 0.4536 kg)原材料 A + 2 lb 原材料 B = 1 lb 初级产品 + 1 lb 液体废料。

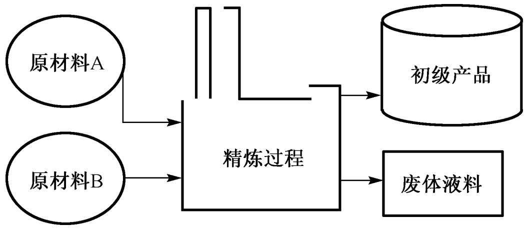


图 3-1　公司初级产品生产的化学过程

但由于环境保护机关发布的政府污染指导方针不再允许将液体肥料直接倒入河中，精炼厂的研究小组开发出一组液体废料的替代方法。

替代方法 1：1 lb 废料 + 1 lb 原料 A = 2 lb 二级产品 *K*；

替代方法 2：1 lb 废料 + 1 lb 原料 A = 2 lb 二级产品 *M*；

替代方法 3：对废料进行特殊处理，之后倒入俄亥俄河。

上个月，该公司生产了 10 000 lb 初级产品。会计部门就上个月固定成本及可变成本的细目给出了一份报告，包括管理费用 12 000 美元，精炼厂常用支出 4000 美元，可变成本中，原材料 A 为 15 000 美元，原材料 B 为 16 000 美元，直接劳动力为 5000 美元。

其中，固定成本为每月 16 000 美元且每月不变，不因产量的变化而变化。通过对可变成本的分析可以得到：原材料 A 的成本为 1.5 美元/lb，原材料 B 的成本为 0.8 美元/lb、生产初级产品需要花费的直接劳动力成本为 0.5 美元/lb。除此之外，其他条件还有：初级产品售价 5.70 美元/lb，二级产品 K 和 M 分别售价 0.85 美元/lb 和 0.65 美元/lb。生产 K 的直接劳务费用是 0.20 美元/lb，生产 M 则是 0.10 美元/lb。液体废料的特殊处理花费 0.25 美元/lb。在下一生产期，公司将有 5000 lb 原料 A 和 7000 lb 原料 B 可用。

公司管理层知道，二级产品质量低劣且有可能无法取得利润。但是，特殊处理也是一种相对昂贵的做法。公司需要在废料处理符合条例的前提下合理分配资源，从而在下一生产周期中获得可能的最高利润。现在管理层需要包括以下几个方面的一份管理报告：

(1) 给出产品基废料处理最优计划，包括计划所得的利润。

(2) 分析每磅初级产品、二级产品 K、二级产品 M 对总利润的贡献。

(3) 讨论附加的每种原材料所拥有的价值(即对原材料影子价格的分析)。

(4) 对目标函数系数的敏感度分析。

(5) 评价该会计师提出的“不以生产 K 作为替代方法”这一建议，这个建议是否合理？如果去除生产 K，最优解决方案将如何改变？

3.1　改进单纯形法

本节将更深入地讨论和研究单纯形法的矩阵描述和改进单纯形法。用矩阵描述单纯形法的计算过程，将有助于对单纯形法的理解，以及学习对偶理论和灵敏度分析。

3.1.1　线性规划模型矩阵形式

设线性规划问题为

$$\max z = \boldsymbol{CX}$$
$$\text{s.t:}\begin{cases}\boldsymbol{AX} \leqslant \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{X} \geqslant 0\end{cases}$$

给线性规划问题的约束条件加入松弛变量 $\boldsymbol{X}_s = (x_{s1}, x_{s2}, \cdots, x_{sm})^{\mathrm{T}}$ 以后，得到标准型

$$\max z = \boldsymbol{CX} + \boldsymbol{OX}_s$$
$$\text{s.t:}\begin{cases}\boldsymbol{AX} + \boldsymbol{IX}_s = b\\ \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}_s \geqslant 0\end{cases}$$

其中，$\boldsymbol{I}$ 是 $m \times m$ 单位矩阵。若基变量为 $\boldsymbol{X}_B$，其对应的系数矩阵就是基矩阵 $\boldsymbol{B}$。$\boldsymbol{X}_N$ 为非基变量，对应的系数矩阵为 $\boldsymbol{N}$。将系数矩阵（$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{I}$）分为（$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{N}$）两块，相应的决策变量被分为 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B\\ \boldsymbol{X}_N\end{pmatrix}$，同时目标函数的系数 $\boldsymbol{C}$ 分为 $\boldsymbol{C}_B$ 和 $\boldsymbol{C}_N$，分别对应于基变量和非基变量，并记作 $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{C}_B, \boldsymbol{C}_N)$。于是，线性规划模型表示为

$$\max z = \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{X}_B + \boldsymbol{C}_N\boldsymbol{X}_N$$
$$\text{s.t:}\begin{cases}\boldsymbol{BX}_B + \boldsymbol{NX}_N = \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{X}_B, \boldsymbol{X}_N \geqslant 0\end{cases}$$

对于约束条件 $\boldsymbol{BX}_B + \boldsymbol{NX}_N = \boldsymbol{b}$，左右两侧均左乘 $\boldsymbol{B}^{-1}$，有 $\boldsymbol{X}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{NX}_N$，将其代入到目标函数中，有：

$$\max z = \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{NX}_N + \boldsymbol{C}_N\boldsymbol{X}_N = \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{C}_N - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{X}_N$$

令非基变量 $\boldsymbol{X}_N = 0$，可得到一个基可行解 $\boldsymbol{X}^{(1)} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\ 0\end{pmatrix}$，目标函数 $z = \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$。该表达式说明：

（1）非基变量的系数 $\boldsymbol{C}_N - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ 就是第 2 章中的符号 $c_j - z_j (j = 1, 2, \cdots, n)$，表示检验数。基变量的检验数表示为 $\boldsymbol{C}_B - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} = 0$，因此所有检验数可以用 $\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$ 表示。

（2）用矩阵描述时 θ 规则的表达式是

$$\theta = \min_i\left[\frac{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_i}{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j)_i}(B^{-1}\boldsymbol{P}_j)_i > 0\right] = \frac{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_i}{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j)_i} \tag{3-1}$$

这里的 $(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_i$ 表示（$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$）中的第 i 个元素；$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j)_i$ 表示（$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j$）向量中的第 i 个元素。这里的表达式的形式与第 2 章中有所不同，但其含义完全相同，这里不再重述。

（3）单纯形表与矩阵表示的关系可以表示为表 3-1。

表 3-1　单纯形表与矩阵表示

	基变量 X_B	非基变量 X_N
系数矩阵	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$
检验数	0	$\boldsymbol{C}_N - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$

计算 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 是较复杂的，但对求最优解和检验数都非常重要。下面介绍一种简单的求法。

令系数矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}$，求其逆矩阵时，可以先从第 1 列开始。

令 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$，以 a_{11} 为主元素，进行变换为 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1/\alpha_{11} \\ -\alpha_{21}/\alpha_{11} \\ \vdots \\ -\alpha_{m1}/\alpha_{11} \end{pmatrix}$，然后构造含有该列而其他列都是单位列的矩阵，即 $\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1/\alpha_{11} & 0 & & 0 \\ -\alpha_{21}/\alpha_{11} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\alpha_{m1}/\alpha_{11} & & & 1 \end{pmatrix}$。这时有

$$\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12}^{(1)} & \cdots & \alpha_{1m}^{(1)} \\ 0 & \alpha_{22}^{(1)} & \cdots & \alpha_{2m}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_{m2}^{(1)} & \cdots & \alpha_{mm}^{(1)} \end{pmatrix}。$$

再以第 2 列的 $\alpha_{22}^{(1)}$ 为主元素，进行变换为 $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -\alpha_{12}^{(1)}/\alpha_{22}^{(1)} \\ 1/\alpha_{22}^{(1)} \\ \vdots \\ -\alpha_{m2}^{(1)}/\alpha_{22}^{(1)} \end{pmatrix}$，然后构造 $\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_{12}^{(1)}/\alpha_{22}^{(1)} & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\alpha_{22}^{(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\alpha_{m2}^{(1)}/\alpha_{22}^{(1)} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，这时有 $\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_{13}^{(2)} & \cdots & \alpha_{1m}^{(2)} \\ 0 & 1 & \alpha_{23}^{(2)} & \cdots & \alpha_{2m}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_{m3}^{(2)} & \cdots & \alpha_{mm}^{(2)} \end{pmatrix}$。如此一步步地进行，直到获得 $\boldsymbol{E}_n\cdots\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ 为止。可见 $\boldsymbol{E}_n\cdots\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-1}$。

用该方法可以求得单纯形表基矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}$。

3.1.2 改进单纯形法步骤

上述线性规划模型的矩阵表达式及其检验数说明，求解线性规划模型的解，主要是求 $\boldsymbol{B}^{-1}$。按照 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 的求解思路，改进单纯形法应运而生。

【例 3-1】 用改进单纯形法求解线性规划问题

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t:} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

【解】 第一步：利用矩阵描述线性规划问题的表达式，给出初始基 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4, \boldsymbol{P}_5) = \boldsymbol{I}_{3\times 3}$，其逆矩阵也是单位矩阵。

初始基变量 $\boldsymbol{X}_{B_0} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$，对应的系数 $\boldsymbol{C}_{B_0} = (0, 0, 0)$，非基变量 $\boldsymbol{X}_{N_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，对应的系数 $\boldsymbol{C}_{N_0} = (2, 3)$。计算非基变量的检验数为

$$\boldsymbol{\sigma}_{N_0} = \boldsymbol{C}_{N_0} - \boldsymbol{C}_{B_0}\boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{N}_0 = (2, 3) - (0, 0, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = (2, 3)$$

由此可确定 x_2 为换入变量，计算 $\theta = \min\left\{\frac{(\boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{b})_i}{(\boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{P}_2)_i}\boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{P}_2 > 0\right\} = \min\left\{\frac{8}{2}, -, \frac{12}{4}\right\} = 3$。

对应的换出变量为 x_5，换入变量 x_2 的系数向量 $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$，确定 4 为主元素，然后计算 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{B}_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$，计算非基变量 (x_4, x_5) 的系数矩阵：由 $\boldsymbol{N}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 变换为

$$\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{N}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

并且计算 $\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}$，于是得到新的基 $\boldsymbol{B}_1 = (\boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4, \boldsymbol{P}_2)$。新的变量 $\boldsymbol{X}_{B_1} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}$，非基变量 $\boldsymbol{X}_{N_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \end{pmatrix}$。相应的，$\boldsymbol{C}_{B_1} = (0, 0, 3)$；$\boldsymbol{C}_{N_1} = (2, 0)$。

第二步：计算非基变量的检验数为

$$\boldsymbol{\sigma}_{N_1} = \boldsymbol{C}_{N_1} - \boldsymbol{C}_{B_1}\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{N}_1 = (2, 0) - (0, 0, 3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (2, -3/4)$$

确定对应的换入变量为 x_1，计算

$$\theta = \min\left\{\frac{(\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{b})_i}{(\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{P}_1)_i}\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{P} > 1\right\} = \min\left(\frac{2}{1}, \frac{16}{4}, \frac{3}{0}\right) = 2$$

对应的换出变量为 x_3，由此得到新的基 $\boldsymbol{B}_2 = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_4, \boldsymbol{P}_2)$。

由 x_1 的系数向量 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$，确定以 1 为主元素，计算 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix}$ 和新的基矩阵的逆矩阵 $\boldsymbol{B}_2^{-1}=\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{B}_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&0\\0&0&1/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\-4&1&2\\0&0&1/4\end{pmatrix}$。

同时，计算 $\boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\-4&1&2\\0&0&1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\16\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\\3\end{pmatrix}$。

第三步：计算非基变量 x_3，x_5 的检验数为

$$\boldsymbol{\sigma}_{N_2}=\boldsymbol{C}_{N_2}-\boldsymbol{C}_{B_2}\boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{N}_2=(0,0)-(2,0,3)\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\-4&1&2\\0&0&1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}=(-2,1/4)$$

对应的换入变量为 x_5，计算

$$\theta=\min\left\{\frac{(\boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{b})_i}{(\boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{P}_5)_i}\boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{P}_5>0\right\}=\min\left(-,\frac{8}{2},\frac{3}{1/4}\right)=4$$

对应的换出变量为 x_4，由此得到新的基 $\boldsymbol{B}_3=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_5,\boldsymbol{P}_2)$。

换入变量 x_5 的系数向量是 $\boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{P}_5=\begin{pmatrix}-1/2\\2\\1/4\end{pmatrix}$，以 2 为主元素，计算 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1/4\\1/2\\-1/8\end{pmatrix}$。

$\boldsymbol{B}_3$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{B}_3^{-1}=\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{B}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&1/4&0\\0&1/2&0\\0&-1/8&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\-4&1&2\\0&0&1/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1/4&0\\-2&1/2&1\\1/2&-1/8&0\end{pmatrix}$。

再计算非基变量 $\boldsymbol{X}_{N_3}=(x_3,x_4)$ 的检验数为

$$\boldsymbol{\sigma}_{N_3}=\boldsymbol{C}_{N_3}-\boldsymbol{C}_{B_3}\boldsymbol{B}_3^{-1}\boldsymbol{N}_3=(0,0)-(2,0,3)\begin{pmatrix}0&1/4&0\\-2&1/2&1\\1/2&-1/8&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}=(-3/2,-1/8)$$

都是负值，得到最优解为 $\boldsymbol{X}^*=\begin{pmatrix}x_1\\x_5\\x_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_3^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0&1/4&0\\-2&1/2&1\\1/2&-1/8&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\16\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}$。

目标函数的值 $z^*=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}_3^{-1}\boldsymbol{b}=(2,0,3)\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}=14$。

3.2 对 偶 问 题

对偶性是线性规划问题的最重要的内容之一，任何线性规划问题都有其对偶问题。那么，对偶是什么？对偶就是对同一事物(或问题)，从不同的角度(或立场)提出对立的两种不同的表述。例如，(1)周长一定，面积最大的矩形是正方形；(2)面积一定，周长最短的矩形

是正方形。(1)和(2)就是互为对偶关系的表述。这种表述有利于加深对事物的认识和理解。

3.2.1　对偶问题的提出

在【例 2.1】中讨论了工厂生产计划模型及其解法，现从另一角度来讨论这个问题。假设该工厂的决策者决定不生产产品Ⅰ、Ⅱ，而将其所有资源出租或外售，这时工厂的决策者就要考虑给每种资源如何定价的问题。

设用 y_1、y_2、y_3 分别表示出租单位设备台时的租金和出让单位原材料 A 和 B 的租金。在进行定价决策时会比较：若用 3 个单位设备台时、2 个单位的原材料 A 和 1 个单位的原材料 B 可以生产一件产品Ⅰ，并获利 2 元，那么生产每件产品Ⅰ的设备台时和原材料出租或出让的所有收入应不低于生产一件产品Ⅰ的利润，有 $3y_1 + 2y_2 + y_3 \geqslant 2$ 。

同理，将生产每件产品Ⅱ的设备台时和原材料出租或出让的所有收入应不低于生产一件产品Ⅱ的利润，这就有 $2y_1 + 5y_2 + 2y_3 \geqslant 3$ 。

把工厂所有设备台时和资源都出租或出让，其收入为 $\omega = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3$ 。

从工厂决策者来看，ω 越大越好，但从接受者来看，支付越少越好，所以工厂的决策者只能在满足大于等于所有产品的利润条件下，提出一个尽可能低的出租或出让价格，才能使得双方均能接受，为此需解决如下的线性规划问题：

$$\min w = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}3y_1 + 2y_2 + y_3 \geqslant 2\\ 2y_1 + 5y_2 + 2y_3 \geqslant 3\\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geqslant 0\end{cases}$$

称这个线性规划问题为【例 2-1】线性规划问题（这里称原问题）的对偶问题。

下面再从矩阵分析的角度来讨论。

从 3.1 节得到检验数的表达式分别是 $\boldsymbol{C}_N - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{C}_B - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}$ ，两者之中均存在 $\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}$ ，称它为单纯形乘子，并用符号 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}$ 表示，$\boldsymbol{Y} \geqslant 0$ 。其中，$\boldsymbol{C}_N - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} \leqslant 0$ ，$\boldsymbol{C}_B - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} \leqslant 0$ 。

令 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{B})$ ，于是 $\boldsymbol{C}_N - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{C}_B - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}$ 可以合并为

$$\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A} \leqslant 0$$

移项后，得到 $\boldsymbol{YA} \geqslant \boldsymbol{C}$ 。

由于目标函数值为 $\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ ，故可以表示为 $\boldsymbol{Yb} = \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{z}$ 。

对线性规划问题

$$\min w = \boldsymbol{Yb}$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}\boldsymbol{YA} \geqslant \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{Y} \geqslant 0\end{cases}$$

称它为原线性规划问题 $\{\max z = \boldsymbol{CX},\ \boldsymbol{AX} \leqslant b,\ \boldsymbol{X} \geqslant 0\}$ 的对偶规划问题。

从这两个规划问题的表达式可以看出它们之间的关系。

根据原线性规划问题的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{b}$，就可以写出它的对偶问题。如【例 2-1】中，原线性规划问题的各系数矩阵是

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C} = (2,\ 3)\ ,\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}8\\ 16\\ 12\end{pmatrix}$$

那么它的对偶问题是
$$\min w = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}3y_1 + 2y_2 + y_3 \geqslant 2\\ 2y_1 + 5y_2 + 2y_3 \geqslant 3\\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geqslant 0\end{cases}$$
。

3.2.2 原问题与对偶问题关系

假设原问题的线性规划模型表示为

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\leqslant\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}\\ x_1,\ \cdots,\ x_n \geqslant 0\end{cases}\tag{3-2}$$

对偶问题为

$$\min z = y_1b_1 + y_2b_2 + \cdots + y_mb_m$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}(y_1,\ \cdots,\ y_m)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\geqslant(c_1,\ \cdots,\ c_n)\\ y_1,\ \cdots,\ y_m \geqslant 0\end{cases}\tag{3-3}$$

以上是原问题与对偶问题的标准形式，它们之间的关系可以用表 3-2 表示。

表 3-2　原问题与对偶问题关系表

x_j / y_j	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	原问题	$\min\omega$
y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	$\leqslant$	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	$\leqslant$	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	$\leqslant$	b_m
对偶关系	$\geqslant$	$\geqslant$	$\cdots$	$\geqslant$	$\max z = \min\omega$	
$\max z$	c_1	c_2	$\cdots$	c_n		

表 3-2 将原问题与对偶问题的汇总于一个表中，从正面看是原问题，将它转 90°后看是对偶问题。原问题与对偶问题之间的变换关系称为对称形式。

原问题的约束条件中含有等式约束条件时，按以下步骤处理。

设等式约束条件的线性规划问题为

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1,\ \cdots,\ m\\ x_j \geqslant 0,\ j = 1,\ \cdots,\ n\end{cases}\tag{3-4}$$

第一步：将等式约束条件分解为两个约束条件，即 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i$ 和 $-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant -b_i$ 。设 y'_i 和 y''_i 分别是对应这两个约束条件的对偶变量。

第二步：按对称形式变换关系可写出它的对偶问题

$$\min w = \sum_{i=1}^{m} b_i y'_i + \sum_{i=1}^{m} (-b_i y''_i)$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y'_i + \sum_{i=1}^{m} (-a_{ij}y''_i) \geqslant c_j,\ j = 1, \cdots, n \\ y'_i,\ y''_i \geqslant 0,\ i = 1, \cdots, m \end{cases} \tag{3-5}$$

将上述规划问题的各式整理后得到

$$\min w = \sum_{i=1}^{m} b_i (y'_i - y''_i)$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}(y'_i - y''_i) \geqslant c_j,\ j = 1, \cdots, n \\ y'_i,\ y''_i \geqslant 0,\ i = 1, \cdots, m \end{cases} \tag{3-6}$$

令 $y_i = y'_i - y''_i$, y'_i , $y''_i \geqslant 0$ ，于是，y_i 不受正、负限制。将 y_i 代入上述规划问题，便得到对偶问题

$$\min w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geqslant c_j,\ j = 1, \cdots, n \\ y_i \text{ 无约束},\ i = 1, \cdots, m \end{cases} \tag{3-7}$$

于是，线性规划的原问题与对偶问题的关系，其变换形式可归纳为表 3-3。

表 3-3　原问题和对偶问题的关系

原问题（或对偶问题）	对偶问题（或原问题）
目标函数 $\max z$	目标函数 $\min \omega$
变量 $\begin{cases} n \text{ 个} \\ \geqslant 0 \\ \leqslant 0 \\ \text{无约束} \end{cases}$	$\left.\begin{matrix} n \text{ 个} \\ \geqslant \\ \leqslant \\ = \end{matrix}\right\}$ 约束条件
约束条件 $\begin{cases} m \text{ 个} \\ \leqslant 0 \\ \geqslant 0 \\ = \end{cases}$	$\left.\begin{matrix} m \text{ 个} \\ \geqslant 0 \\ \leqslant 0 \\ \text{无约束} \end{matrix}\right\}$ 变量
约束条件右端项	目标函数变量的系数
目标函数变量的系数	约束条件右端项

表 3- 3 说明，基于原问题可以写出其对偶问题。其步骤如下。

第一步：基于原问题的约束条件的个数假设对偶变量的个数和对偶变量。

第二步：基于原问题的常数，写成对偶线性模型的线性表达式。

重写模型(3-2)

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m\end{pmatrix} \\ x_1, \cdots, x_n \geqslant 0\end{cases}$$

按照其常数写出的对偶表达式中目标函数为 $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ ，其约束条件为 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ 。

第三步：确定符号。原问题的目标函数与对偶问题的目标函数是对应的；原问题约束条件的符号与对偶问题对偶变量的符号是对应的；原问题决策变量的符号与对偶问题的约束条件的符号是对应的。结合表 3-3，可以将这种变换描述如下：

(1) 如果原问题的目标函数取最大值，则对偶问题的目标函数取最小值，且原问题的约束条件的符号与对偶问题对偶变量的符号正好相反，而原问题决策变量的符号与对偶问题约束条件的符号正好相同。

(2) 如果原问题的目标函数取最小值，则对偶问题的目标函数取最大值，且原问题的约束条件的符号与对偶问题对偶变量的符号正好相同，而原问题决策变量的符号与对偶问题约束条件的符号正好相反。

其中，等号的相同和相反均为无约束，无约束的相同和相反为等号。

【例 3-2】试求下述线性规划原问题的对偶问题：

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geqslant 5 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 \leqslant 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leqslant 0,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \text{ 无约束}\end{cases}$$

【解】第一步：由于原问题的约束条件有三个，故对偶变量也有三个，分别为 y_1，y_2，y_3 。

第二步：写出对偶问题的线性表达式。目标函数为 $5y_1 + 4y_2 + 6y_3$ ；约束条件为 $y_1 + 2y_2$，$y_1 + y_3$ ，$-3y_1 + 2y_2 + y_3$ ，$y_1 - y_2 + y_3$ 。

第三步：确定符号。由于原问题的目标函数为最小值，因此，对偶问题的目标函数取最大值，且原问题的约束条件的符号与对偶问题对偶变量的符号正好相同，而原问题决策变量的符号与对偶问题约束条件的符号正好相反。于是，其对偶模型表示为

$$\max z = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geqslant 2 \\ y_1 + y_3 \leqslant 3 \\ -3y_1 + 2y_2 + y_3 \leqslant -5 \\ y_1 - y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \geqslant 0,\ y_2 \leqslant 0,\ y_3 \text{ 无约束}\end{cases}$$

3.2.3　对偶问题的性质

(1)对称性。对偶问题的对偶是原问题。

证明：假定原问题为

$$\max z = \boldsymbol{CX}$$
$$\text{s.t}: \begin{cases} \boldsymbol{AX} \leqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant 0 \end{cases} \tag{3-8}$$

依据对偶问题的写法，其目标函数取最大值，对偶问题的目标函数取最小值，按照上述对偶问题的确定方法，其对偶问题为

$$\min w = \boldsymbol{Yb}$$
$$\text{s.t}: \begin{cases} \boldsymbol{YA} \geqslant \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{Y} \geqslant 0 \end{cases} \tag{3-9}$$

同理，式(3-9)的目标函数为最小值，其对偶问题的目标函数取最大值，按照对偶问题的确定方法，其对偶问题正好是式(3-8)，得证。

(2)弱对偶性。若 $\overline{X}$ 是原问题的可行解，$\overline{Y}$ 是对偶问题的可行解。则存在 $C\overline{X} \leqslant \overline{Y}b$ 。

证明：针对式(3-8)和式(3-9)的约束条件，有 $\boldsymbol{A\overline{X}} \leqslant \boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{\overline{Y}A} \geqslant \boldsymbol{C}$ ；将 $\boldsymbol{A\overline{X}} \leqslant \boldsymbol{b}$ 左乘 $\boldsymbol{\overline{Y}}$，有 $\boldsymbol{\overline{Y}A\overline{X}} \leqslant \boldsymbol{\overline{Y}b}$ ；将 $\boldsymbol{\overline{Y}A} \geqslant \boldsymbol{C}$ 右乘 $\boldsymbol{\overline{X}}$，有 $\boldsymbol{\overline{Y}A\overline{X}} \geqslant \boldsymbol{C\overline{X}}$ ，于是 $\boldsymbol{C\overline{X}} \leqslant \boldsymbol{\overline{Y}b}$ ，得证。

(3)无界性。若原问题(对偶问题)为无界解，则其对偶问题(原问题)无可行解。

证明：由弱对偶性问题显然得。

注意，这个问题的性质不存在逆。当原问题(对偶问题)无可行解时，其对偶问题(原问题)或具有有界解或无可行解。例如下述一对问题两者皆无可行解：

原问题(对偶问题)	对偶问题(原问题)
$\min w = -x_1 - x_2$	$\max z = y_1 + y_2$
$\text{s.t}: \begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant 1 \\ -x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$	$\text{s.t}: \begin{cases} y_1 - y_2 \leqslant -1 \\ -y_1 + y_2 \leqslant -1 \\ y_1,\ y_2 \geqslant 0 \end{cases}$

(4)可行解是最优解时的性质。设 $\boldsymbol{\hat{X}}$ 是原问题的可行解，$\boldsymbol{\hat{Y}}$ 是对偶问题的可行解，当 $\boldsymbol{C\hat{X}} = \boldsymbol{\hat{Y}b}$ 时，$\boldsymbol{\hat{X}}$、$\boldsymbol{\hat{Y}}$ 是最优解。

证明：基于弱对偶性，可以得到 $\boldsymbol{C\overline{X}} \leqslant \boldsymbol{\overline{Y}b}$ 。假定 $\boldsymbol{\hat{X}}$，$\boldsymbol{\hat{Y}}$ 分别原问题和对偶问题的最优解，肯定也是可行解，则也满足 $\boldsymbol{C\hat{X}} \leqslant \boldsymbol{\hat{Y}b}$ 。

式(3-8)中的检验数可以表示为 $\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$ ，且 $\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} \leqslant 0$ ，即 $\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} \geqslant \boldsymbol{C}$ 。于是，可以设定 $\boldsymbol{\overline{Y}} = \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}$ ，有 $\boldsymbol{\overline{Y}b} = \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 。由于 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 是原问题的最优解 $\boldsymbol{\hat{X}}$，故 $\boldsymbol{\overline{Y}}b = \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{\hat{X}}$ 。

由于 $\boldsymbol{\overline{Y}}$ 是对偶问题的可行解，且对偶问题目标函数取最小值，故 $\boldsymbol{\overline{Y}b} \geqslant \boldsymbol{\hat{Y}b}$ ，即 $\boldsymbol{C\hat{X}} \geqslant \boldsymbol{\hat{Y}b}$。于是，有 $\boldsymbol{C\hat{X}} = \boldsymbol{\hat{Y}b}$ 。

(5)对偶定理。若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解，且目标函数值相等。

(6)互补松弛性。若 $\boldsymbol{\hat{X}}$，$\boldsymbol{\hat{Y}}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，那么 $\boldsymbol{\hat{Y}X}_s = 0$ 和 $\boldsymbol{Y}_s\boldsymbol{\hat{X}} = 0$，当且仅当 $\boldsymbol{\hat{X}}$，$\boldsymbol{\hat{Y}}$ 为最优解时。

证明：如果 $\boldsymbol{\hat{X}}$，$\boldsymbol{\hat{Y}}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，在式(3-8)和式(3-9)的约束条件中，分别引入松弛变量 $\boldsymbol{X}_s$ 和剩余变量 $\boldsymbol{Y}_s$ ，于是有 $\boldsymbol{A\hat{X}} + \boldsymbol{X}_s = \boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{\hat{Y}A} - \boldsymbol{Y}_s = \boldsymbol{C}$ 。

将 $\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}+\boldsymbol{X}_s=\boldsymbol{b}$ 左乘 $\hat{\boldsymbol{Y}}$，有 $\hat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}+\hat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{X}_s=\hat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{b}$。

将 $\hat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Y}_s=\boldsymbol{C}$ 右乘 $\hat{\boldsymbol{X}}$，有 $\hat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{Y}_s\hat{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{X}}$。

如果 $\hat{\boldsymbol{X}}$，$\hat{\boldsymbol{Y}}$ 是原问题和对偶问题的最优解，则 $\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{X}}=\hat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{b}$。因此，$\hat{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{X}_s=0$，$\boldsymbol{Y}_s\hat{\boldsymbol{X}}=0$。

【例 3-3】已知线性规划问题

$$\max z=3x_1+5x_2$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}-3x_1+5x_2+x_3\leqslant 12\\ -x_1+x_2-2x_3\leqslant 3\\ x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0\end{cases}$$

试用对偶理论证明上述线性规划问题无最优解。

证明：本例存在可行解，如 $\boldsymbol{X}=(0,0,0)$，而上述问题的对偶问题为

$$\min z=12y_1+3y_2$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}-3y_1-y_2\geqslant 3\\ 5y_1+y_2\geqslant 5\\ y_1-2y_2\geqslant 0\\ y_1,\ y_2\geqslant 0\end{cases}$$

由第一约束条件可知对偶问题无可行解，因原问题有可行解，故无最优解。

【例 3-4】已知线性规划问题

$$\max z=x_1+2x_2+3x_3+4x_4$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+3x_4\leqslant 20\\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4\leqslant 20\\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0\end{cases}$$

其对偶问题得最优解为 $y_1=1.2$，$y_2=0.2$。试用对偶理论找出原问题的最优解。

【解】先写出它的对偶问题

$$\min z=20y_1+20y_2$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}y_1+2y_2\geqslant 1\\ 2y_1+y_2\geqslant 2\\ 2y_1+3y_2\geqslant 3\\ 3y_1+2y_2\geqslant 4\\ y_1,\ y_2\geqslant 0\end{cases}$$

令原问题的最优解为 x_1^*、x_2^*、x_3^*、x_4^*，而对偶问题的四个约束条件，分别引入四个剩余变量，即

$$\text{s.t:}\begin{cases}y_1+2y_2-y_3=1\\ 2y_1+y_2-y_4=2\\ 2y_1+3y_2-y_5=3\\ 3y_1+2y_2-y_6=4\\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ y_6\geqslant 0\end{cases}$$

按照互补松弛性定理，有 $y_3x_1^*+y_4x_2^*+y_5x_3^*+y_6x_4^*=0$。

将最优解代入该对偶问题的规划模型中，在其约束条件中，只有 $2y_1+3y_2=3$ 和 $3y_1+2y_2=4$，其他两个约束条件严格成立，因此有 $y_5=y_6=0$，于是 $y_3x_1^*+y_4x_2^*=0$。

由于 $y_3, x_1^*, y_4, x_2^* \geqslant 0$，故 $x_1^*=x_2^*=0$。于是，原问题可以化简为

$$\max z = 3x_3+4x_4$$

$$\text{s.t}: \begin{cases} 2x_3+3x_4 \leqslant 20 \\ 3x_3+2x_4 \leqslant 20 \\ x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

同时，将该问题约束条件引入松弛变量，有

$$\text{s.t}: \begin{cases} 2x_3+3x_4+x_5=20 \\ 3x_3+2x_4+x_6=20 \\ x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0 \end{cases}$$

基于互补松弛性定理，有 $x_5y_1^*+x_6y_2^*=0$。于是，解方程组

$$\begin{cases} 2x_3+3x_4=20 \\ 3x_3+2x_4=20 \end{cases}$$

故原问题的最优解为 $x_1^*=0$，$x_2^*=0$；$x_3^*=4$；$x_4^*=4$。

3.2.4　对偶问题的经济解释

影子价格(对偶问题的最优解)是投资项目经济评价的重要参数，它是指社会处于某种最优状态下，能够反映社会劳动消耗、资源稀缺程度和最终产品需求状况的价格。影子价格是社会对货物真实价值的度量，只有在完善的市场条件下才会出现。然而这种完善的市场条件是不存在的，因此现成的影子价格也是不存在的，只有通过对现行价格的调整，才能求得它的近似值。

在单纯形法的每步迭代中，目标函数取值 $z=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 和检验数 $\boldsymbol{C}_N-\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ 中都有乘子 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}$，那么 Y 的经济意义是什么？

设 $\boldsymbol{B}$ 是 $\{\max z=\boldsymbol{CX} \mid \boldsymbol{AX}\leqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{X}\geqslant 0\}$ 的最优基，于是 $z^*=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{Y}^*\boldsymbol{b}$，由此得

$$\frac{\partial z^*}{\partial \boldsymbol{b}}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{Y}^*$$

所以变量 y_i^* 的经济意义是，在其他条件不变的情况下，单位资源变化所引起的目标函数的最优值的变化。

【例 3-5】(生产计划)某厂生产三种产品Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ，经过 A、B、C 三种设备加工。生产单位各种产品所需要的设备台时、设备加工能力和每件产品的预期利润见表 3-4(产品的件数可以不为整数)，求获利最大的生产计划。

表 3-4　生产能力及计划表

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	设备能力/台时
A	1	1	1	100
B	10	4	5	600
C	2	2	6	300
单件利润/元	10	6	4	

【解】假设三种产品的产量分别为 x_1、x_2、x_3，采用单纯形法求解上述线性规划问题，其最终单纯形性表见表 3-5。

表3-5　最终单纯形表

			10	6	4	0	0	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
6	x_2	200/3	0	1	5/6	5/3	-1/6	0
10	x_1	100/3	1	0	1/6	-2/3	1/6	0
0	x_6	100	0	0	4	-2	0	1
	$-z$		0	0	-8/3	-10/3	-2/3	0

其对偶问题的最优解为10/3,2/3和0，意义如下：

(1)对于A而言，其影子价格为10/3。说明每增加一个单位的A资源，企业将多获利10/3元；相应地，如果减少一个单位的A资源，企业获利将减少10/3元。如果一个单位的A资源市场价格高于10/3元，企业将卖出该资源，因为卖出比自行生产利润更高；反之，如果一个单位的A资源市场价格低于10/3元，企业将买进该资源，因为可以获得更高的利润。

(2)对于B而言，其影子价格为2/3。说明每增加一个单位的B资源，企业将多获利2/3元；相应地，如果减少一个单位的B资源，企业获利将减少2/3元。如果一个单位的B资源市场价格高于2/3元，企业将卖出该资源，因为卖出比自行生产利润更高；反之，如果一个单位的B资源市场价格低于2/3元，企业将买进该资源，因为可以获得更高的利润。

(3)对于C而言，其影子价格为0。说明每增加或者减少一个单位的C资源，对企业获利没有任何影响。

上述分析说明，影子价格对资源有调节作用，即企业所拥有的资源并不是固定的，可以通过市场加以有效调节。

3.2.5　对偶单纯形法

在单纯形法中，通过不断检查非基变量检验数，判断每步所获得的解是否为最优解。以标准化的线性规划模型为例，其判定条件是所有的非基变量检验数全部小于或等于零。

然而，如果在某步迭代过程中，检验数全部小于或等于零，但是$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$中至少有一个负分量，则依据单纯形法，该问题无解，而事实并非如此。

同时，如果在标准化的线性规划模型的约束条件中无法找到初始基，如

$$\min z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}3x_1 + x_2 \geqslant 3\\4x_1 + 3x_2 > 6\\x_1 + 2x_2 \leqslant 3\\x_1,\ x_2 \geqslant 0\end{cases} \tag{3-10}$$

对其进行标准化处理

$$\max z = -2x_1 - x_2$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}3x_1 + x_2 - x_3 = 3\\4x_1 + 3x_2 - x_4 = 6\\x_1 + 2x_2 + x_5 = 3\\x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geqslant 0\end{cases}$$

无法找到初始可行基。解决该线性模型需要引入人工变量或者采用两阶段法，但是求解过程较为复杂。

针对上述两类问题，下面介绍一种新的单纯形法，即对偶单纯形法。其主要步骤如下：

(1)根据线性规划问题，列出初始单纯形表。检查 $\boldsymbol{b}$ 列的数字，若都为非负，检验数都为非正，则已得到最优解。停止计算。若检查 $\boldsymbol{b}$ 列的数字时，至少还有一个负分量，检验数保持非正，那么进行一下计算。

如果无法找到初始可行基，将约束条件左右均乘以"-1"之后进行标准化处理之后能够找到初始基，也可以采用对偶单纯形法。如在模型(3－10)中，如果将第一个和第二个约束条件左右均乘以"-1"，进而引入松弛变量，有

$$\max z = -2x_1 - x_2$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ -4x_1 - 3x_2 + x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 3 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

此时，在约束条件中能够找到一个初始基，也可以采用对偶单纯形法计算。

但对于线性规划模型

$$\min z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geqslant 6 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 3 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

对第二个约束条件左、右乘以"-1"之后，并引入松弛变量，即

$$\max z = -2x_1 - x_2$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

此时，约束条件中仍然找不到初始基，只能采用人工变量法或者两阶段法求解，无法采用对偶单纯形法求解。

(2)确定换出变量。按 $\min\{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_i \mid (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_i < 0\} = (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_l$ 对应的基变量 x_l 为换出变量。

(3)确定换入变量。在单纯形表中检查 x_l 所在行的各系数 $\alpha_{ij}(j = 1, 2, \cdots, n)$。若所有 $\alpha_{ij} \geqslant 0$，则无可行解，停止计算；若存在 $\alpha_{ij} < 0(j = 1, 2, \cdots, n)$，计算

$$\theta = \min_j\left\{\frac{c_j - z_j}{\alpha_{lj}} \middle| \alpha_{lj} < 0\right\} = \frac{c_k - z_k}{\alpha_{lk}}$$

按 θ 规则所对应的列的非基变量 x_k 为换入变量，才能保持得到的对偶问题解仍为可行解。

(4)以 α_{lk} 为主元素，按照单纯形法迭代的方法进行迭代运算，得到新的计算表。

(5)判断上述解是否是最优解。判断准则是：

在目标函数为最大值的情况下，要求所有的非基变量检验数全部小于或者等于零，且所有的 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 全部大于或者等于零。

在目标函数为最小值的情况下，要求所有的非基变量检验数全部大于或者等于零，且所有的 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 全部大于或者等于零。

(6)如果满足步骤(5)中的条件，则直接输出最优解；如果不满足该条件，则转到步骤(2)。

【例 3-6】用对偶单纯形法求解【例 3-5】的对偶问题。

【解】设 A、B、C 三种资源的影子价格分别为 y_1、y_2、y_3，其对偶规划模型为

$$\min z = 100y_1 + 600y_2 + 300y_3$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} y_1 + 10y_2 + 2y_3 \geqslant 10 \\ y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geqslant 6 \\ y_1 + 5y_2 + 6y_3 \geqslant 4 \\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

如果标准化处理，则需要引入三个剩余变量，难以得到初始基，故将三个不等式左右均乘以“-1”，引入松弛变量，可得到初始基，即

$$\max z = -100y_1 - 600y_2 - 300y_3$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} -y_1 - 10y_2 - 2y_3 + y_4 = -10 \\ -y_1 - 4y_2 - 2y_3 + y_5 = -6 \\ -y_1 - 5y_2 - 6y_3 + y_6 = -4 \\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ y_6 \geqslant 0 \end{cases}$$

建立此问题的初始单纯形表，见表 3-6。

表 3-6　初始对偶单纯形表

$c_j \rightarrow$			-100	-600	-300	0	0	0
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
0	y_4	-10	-1	-10	-2	1	0	0
0	y_5	-6	-1	-4	-2	0	1	0
0	y_6	-4	-1	-5	-6	0	0	1
$-z$			-100	-600	-300	0	0	0

尽管所有的非基变量检验数全部为负数，但是 $\boldsymbol{b}$ 为负数，所得到的解并不是最优解，需要进行迭代。

换出变量的确定：计算 $\min(-10,\ -6,\ -4) = -10$，故其对应的行 y_4 为换出变量。

换入变量的确定：计算 $\theta = \min\left(\dfrac{-100}{-1},\ \dfrac{-600}{-10},\ \dfrac{-300}{-2}\right) = 60$，故 y_2 为换入变量。换入、换出变量的所在列、行交叉处的“-10”为主元素。按单纯形法计算步骤进行迭代，得表 3-7。

尽管所有的非基变量检验数全部为负数，但是 $\boldsymbol{b}$ 为负数，仍需要进行迭代。

换出变量的确定：计算 $\min(1,\ -2,\ 1) = -2$，故其对应的行 y_5 为换出变量。

换入变量的确定：计算 $\theta = \min\left(\dfrac{-40}{-0.6},\ \dfrac{-180}{-1.2},\ \dfrac{-60}{-0.4}\right) = \dfrac{200}{3}$，故 y_1 为换入变量。换

入、换出变量的所在列、行交叉处的“－0.6”为主元素。按单纯形法计算步骤进行迭代，得表 3-8。

表 3-7　第一次迭代的单纯形表

$c_j \to$			−100	−600	−300	0	0	0
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
−600	y_2	1	0.1	1	0.2	−0.1	0	0
0	y_5	−2	−0.6	0	−1.2	−0.4	1	0
0	y_6	1	−0.5	0	−5	−0.5	0	1
$-z$			−40	0	−180	−60	0	0

表 3-8　第二次迭代的单纯形表

$c_j \to$			−100	−600	−300	0	0	0
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
−600	y_2	2/3	0	1	0	−0.17	0.17	0
−100	y_1	10/3	1	0	2	0.67	−1.67	0
0	y_6	8/3	0	0	−4	−0.17	−0.83	1
$-z$			0	0	−100	−33.33	−66.67	0

表 2-8 中，$\boldsymbol{b}$ 列数字全为非负，所有非基变量检验数全为非正，故问题的最优解为

$$y^* = (10/3, 2/3, 0, 0, 0, 8/3)$$

从以上求解过程可以看到对偶单纯形法有以下优点：

（1）初始解可以是非可行解，当检验数都为负数时，就可以进行基的变换，这时不需要加入人工变量，因此可以简化计算。

（2）当变量多于约束条件，用对偶单纯形法计算可以减少计算工作量，因此对变量较少，而约束条件很多的线性规划问题，可先将它变换成对偶问题，然后用对偶单纯形法求解。

（3）在灵敏度分析及求解整数规划的割平面法中，有时需要用对偶单纯形法，这样可使问题的处理简化。

对偶单纯形法的局限性主要是，对大多数线性规划问题，很难找到一个初始可行基，因而这种方法在求解线性规划问题时很少单独应用。

与单纯形法相比，两者的主要不同之处体现在：

（1）单纯形法先确定换入变量再确定换出变量，而对偶单纯形法先确定换出变量再确定换入变量。

（2）两者在迭代过程中，都使用最小比值规则。

单纯形法采用的是 $\theta = \min\limits_i\left(\dfrac{b'_i}{\alpha'_{ik}}\middle|\alpha'_{ik} > 0\right) = \dfrac{b'_l}{\alpha'_{lk}}$；

对偶单纯形法采用的是 $\theta = \min\limits_j\left(\dfrac{c_j - z_j}{\alpha_{lj}}\middle|\alpha_{lj} > 0\right) = \dfrac{c_k - z_k}{\alpha_{lk}}$。

（3）两者判断最优解的条件不同。以标准型为例，单纯形法要求所有的非基变量检验数全部小于或等于零即可。但对偶单纯形法不仅仅要求所有的非基变量检验数全部小于或等于零，且 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geqslant 0$。

两者的计算程序及其比较图如图 3-2 所示。

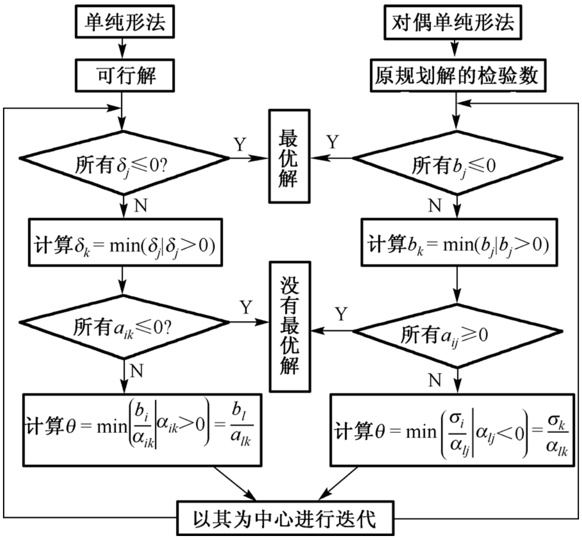


图 3-2　单纯形法与对偶单纯形法比较图

3.3　灵敏度分析

所谓灵敏度分析，就是指研究与分析一个系统(或模型)的状态或输出变化对系统参数或周围条件变化的敏感程度的方法。在最优化方法中，利用灵敏度分析来研究原始数据发生变化时最优解的稳定性，还可以决定哪些参数对系统或模型有较大的影响。

3.3.1　价值系数的灵敏度分析

在线性规划问题时，假定 a_{ij}，b_i，c_j 都是常数，是估计值和预测值。在现实中，这些常数均可能发生变化，导致最优解也可能发生变化。市场条件一变，c_j 值就会变化。分析 c_j 变化范围，确保最优解不发生改变，就是价值系数的灵敏度分析。

一个单纯形表为最优单纯形表判定条件是所有的非基变量检验数全部小于或者等于零，且 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geqslant 0$ 。价值系数的变化只会影响非基变量检验数，因此只需分析检验数的变化值。下面就 c_j 非基变量和基变量价值系数两种情况来讨论。

(1)对某线性规划模型，其基变量检验数一定为 0，其非基变量检验数为 $\boldsymbol{C}_N - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ 。

如果 c_r 是基变量 x_r 的系数，则当 c_r 值发生变化时，引起 $\boldsymbol{C}_B$ 的变化，有

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{C}_B + \Delta\boldsymbol{C}_B)\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} &= \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} + \Delta\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} \\
&= \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} + (0, \cdots, \Delta c_r, \cdots, 0)\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} \\
&= \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} + \Delta c_r(\overline{\alpha}_{r1}, \cdots, \overline{\alpha}_{rn})
\end{aligned}
$$

可见，当 c_r 变化 Δc_r 后，最终表中非基变量检验数是 $\boldsymbol{\sigma}'_j = \boldsymbol{\sigma}_j - \Delta c_r(\overline{\alpha}_{r1}, \cdots, \overline{\alpha}_{rn})$ 。

若要求原最优解不变，即必须满足 $\boldsymbol{\sigma}'_j \leqslant 0$ 。当 $\overline{\alpha}_{rj} < 0$ 时，$\Delta c_r \leqslant \boldsymbol{\sigma}_j/\overline{\alpha}_{rj}$ ；当 $\overline{\alpha}_{rj} > 0$ 时，$\Delta c_r \geqslant \boldsymbol{\sigma}_j/\overline{\alpha}_{rj}$，故 Δc_r 可变化的范围是

$$
\max_j\{\boldsymbol{\sigma}_j/\overline{\alpha}_{rj} \mid \overline{\alpha}_{rj} > 0\} \leqslant \Delta c_r \leqslant \min_j\{\boldsymbol{\sigma}_j/\overline{\alpha}_{rj} \mid \overline{\alpha}_{rj} < 0\}
$$

(2)若 c_j 是非基变量 x_j 的系数，则其改变的仅仅是 $\boldsymbol{C}_N - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ 中的 $\boldsymbol{C}_N$，对 $\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ 没有任何影响。因此，只需要分析改变的这个非基变量检验数即可。

假定某个非基变量的价值系数由 c_j 变化 Δc_j 后，其检验数变为 $\sigma'_j = \sigma_j + \Delta c_j$。只要 σ'_j 小于或者等于零，即 $\sigma'_j = \sigma_j + \Delta c_j$ 小于或等于零即可。

【例 3-7】对【例 3-5】中的 c_2、c_3 进行灵敏度分析。

【解】由题意可知，该线性规划模型的最终单纯形表见表 3-9。

表 3-9　最终单纯形表

			10	6	4	0	0	0
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
6	x_2	200/3	0	1	5/6	5/3	−1/6	0
10	x_1	100/3	1	0	1/6	−2/3	1/6	0
0	x_6	100	0	0	4	−2	0	1
	$-z$		0	0	−8/3	−10/3	−2/3	0

c_2 所对应的 x_2 为基变量,故其变化范围为 $\max\left(\dfrac{-8/3}{5/6},\dfrac{-10/3}{5/3}\right) \leqslant \Delta c_2 \leqslant \min\left(\dfrac{-10/3}{-2}\right)$。

由于 c_3 所对应的 x_3 为非基变量，故其变化范围为 $-8/3 + \Delta c_3 \leqslant 0$，即 $\Delta c_3 \leqslant 8/3$。

如果不采用上述公式，则将改变的价值系数直接代入最终单纯形表中，结果也是一致的。若对 c_2 进行灵敏度分析，其单纯形表变为表 3-10。

要使得表 3-10 不再发生迭代,即最优解不变,则必须:

$$-\frac{8}{3} - \frac{5}{6}\Delta c_2 \leqslant 0\ ,\ -\frac{10}{3} - \frac{5}{3}\Delta c_2 \leqslant 0\ ,\ -\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\Delta c_2 \leqslant 0$$

于是得到 $-2 \leqslant \Delta c_2 \leqslant 4$。

如果 c_3 变化为 $4 + \Delta c_3$，其单纯形表为表 3-11。

表 3-10　c_2 变化后的单纯形表

			10	$\Delta c_2 + 6$	4	0	0	0
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$\Delta c_2 + 6$	x_2	200/3	0	1	5/6	5/3	−1/6	0
10	x_1	100/3	1	0	1/6	−2/3	1/6	0
0	x_6	100	0	0	4	−2	0	1
	$-z$		0	0	$-\frac{8}{3} - \frac{5}{6}\Delta c_2$	$-\frac{10}{3} - \frac{5}{3}\Delta c_2$	$-\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\Delta c_2$	0

表 3-11　c_3 变化后的单纯形表

			10	6	$4 + \Delta c_3$	0	0	0
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
6	x_2	200/3	0	1	5/6	5/3	−1/6	0
10	x_1	100/3	1	0	1/6	−2/3	1/6	0
0	x_6	100	0	0	4	−2	0	1
	$-z$		0	0	$-\frac{8}{3} + \Delta c_3$	−10/3	−2/3	0

保持最优解不变,即 $-8/3 + \Delta c_3 \leqslant 0$,也就是 $\Delta c_3 \leqslant 8/3$。

3.3.2　资源的灵敏度分析

企业所拥有的资源并不是一成不变的，通过影子价格可以有效调配企业的相关资源。基于上述判定最优解的基本方法，资源的变化不会影响非基变量检验数，只会影响 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 。尽管单纯形表不会再发生迭代，但是最优解可能发生变化。因此资源的灵敏度分析只是分析资源在何种范围内变化时，最优基变量不会改变。

资源数量变化是指系数 b_r 发生变化，即 $b'_r = b_r + \Delta b_r$ 。假设规划问题的其他系数都不变，最终表中原问题的解为 $X'_B = B^{-1}(b + \Delta b)$ ，$\Delta b = (0, \cdots, \Delta b_r, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 。

只要 $\boldsymbol{X}'_B \geqslant 0$ ，因最终表中检验数不变，故最优基不变，但最优解的值可能发生变化，可允许变化范围可以表示为：

$$\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{B}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta b_r \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + \begin{pmatrix} \bar{a}_{1r}\Delta b_r \\ \vdots \\ \bar{a}_{ir}\Delta b_r \\ \vdots \\ \bar{a}_{mr}\Delta b_r \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + \Delta b_r \begin{pmatrix} \bar{a}_{1r\ r} \\ \vdots \\ \bar{a}_{ir} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mr} \end{pmatrix}$$

要求在最终表中求得的 $\boldsymbol{b}$ 列的所有元素 $\bar{b}_i + \bar{\alpha}_{ir}\Delta b_r \geqslant 0$ 。由此可得

$$\bar{\alpha}_{ir}\Delta b_r \geqslant -\bar{b}_i, \ i = 1, 2, \cdots, m$$

当 $\bar{\alpha}_{ir} > 0$ 时，$\Delta b_r \geqslant -\bar{b}_i / \bar{\alpha}_{ir}$ ；$\bar{\alpha}_{ir} < 0$ 时，$\Delta b_r \leqslant -\bar{b}_i / \bar{\alpha}_{ir}$ 。于是得到

$$\max\{-\bar{b}_i/\bar{\alpha}_{ir} \mid \bar{\alpha}_{ir} > 0\} \leqslant \Delta b_r \leqslant \min\{-\bar{b}_i/\bar{\alpha}_{ir} \mid \bar{\alpha}_{ir} < 0\}$$

另外，在 $\boldsymbol{X}'_B = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b})$ 中，$\boldsymbol{B}^{-1}$ 至关重要。基于初始单纯形表和最终单纯形表，同样可以确定 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 。

对初始的线性规划模型的约束条件进行矩阵表示，为 $\boldsymbol{IX}_B + \boldsymbol{NX}_N = \boldsymbol{b}$ 。于是有

$$\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{IX}_B + \boldsymbol{NX}_N) = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

于是，初始基变量的矩阵在最终单纯形表中所对应的矩阵即为 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 。具体寻找方式为：首先将初始单纯形表中的基变量所对应的矩阵按照单位阵排列，相应的基变量也重新排列，重新排列之后的基变量在最终单纯形表中的矩阵就是 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 。

【例 3-8】对【例 3-5】中的 b_2 进行灵敏度分析。

【解】【例 3-5】中的最终单纯形表为表 3-12。

表 3-12　最终单纯形表

			10	6	4	0	0	0
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
6	x_2	200/3	0	1	5/6	5/3	−1/6	0
10	x_1	100/3	1	0	1/6	−2/3	1/6	0
0	x_6	100	0	0	4	−2	0	1
	$-z$		0	0	−8/3	−10/3	−2/3	0

按照前面给出的定义，有 $\max\left(\dfrac{-100/3}{1/6}\right) \leqslant \Delta b_2 \leqslant \min\left(\dfrac{-200/3}{-1/6}\right)$ ，即 $-200 \leqslant \Delta b_2 \leqslant 400$。

在初始单纯形表中，按照单位阵排列的基变量为 x_4、x_5、x_6，故其在最终单纯性表中对对应的矩阵即为 $\boldsymbol{B}^{-1}$，即 $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}5/3 & -1/6 & 0\\ -2/3 & 1/6 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$。于是有

$$\boldsymbol{B}^{-1}\begin{pmatrix}200/3\\ 100/3+\Delta b_2\\ 100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/3 & -1/6 & 0\\ -2/3 & 1/6 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\ 600+\Delta b_2\\ 300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}200/3-\Delta b_2/6\\ 100/3+\Delta b_2/6\\ 100\end{pmatrix}$$

要使得最优基变量不变，有 $200/3-\Delta b_2/6\geqslant 0$，$100/3+\Delta b_2/6\geqslant 0$，即

$$-200\leqslant \Delta b_2\leqslant 400$$

3.3.3　技术系数的灵敏度分析

企业的生产工艺的改变，会引起 a_{ij} 的改变。这种改变可以划分为以下三种情形。

(1)约束条件的系数矩阵中，某一个或者多个技术系数发生变化。

如果变化的技术系数是非基变量所对应的系数，则只需要将 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 与最终单纯形表中该列系数相乘。在最终单纯形表中，如果该变量仍然是非基变量，则只需其检验数是否满足要求即可；如果其变成基变量，需要判断是否需要迭代，如果迭代则最优解将可能发生改变。

(2)约束条件中增加或者减少一个或者多个变量，即增加或者减少一列或者多列。

如果增加的变量检验数不满足要求，则最优解不变。如果减少的变量为非基变量，则最优解不变；如果减少的变量为基变量，则最优解发生改变。

(3)约束条件中增加或者减少一行或者多行。

增加或者减少行会导致最优解改变，因为基变量已经改变。

【例 3-9】由于工艺的变化，【例 3-5】中生产产品Ⅱ时采用 B 的技术系数由 4 变成 2，请问最优解是否改变？生产产品Ⅲ时采用 C、B 的技术系数在什么范围内改变，最优解不改变？假定企业发现一种新的产品Ⅳ，其消耗的三种资源数量分别是 2、6 和 10，请问这种产品是否可以生产？

【解】首先计算出该线性规划模型的最终单纯形表，见表 3-13。

表 3-13　最终单纯形表

			10	6	4	0	0	0
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
6	x_2	200/3	0	1	5/6	5/3	−1/6	0
10	x_1	100/3	1	0	1/6	−2/3	1/6	0
0	x_6	100	0	0	4	−2	0	1
	$-z$		0	0	−8/3	−10/3	−2/3	0

(1)如果技术系数发生改变,则 x_2 所在列在最终单纯形表的系数将变成

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}5/3 & -1/6 & 0\\ -2/3 & 1/6 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/3\\ -1/3\\ 0\end{pmatrix}$$

将改变的系数替换最终单纯形表中的 x_2 所在列的系数 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，则由于 x_2 在最终单纯形表中为基变量，故需要将其改变为基变量，故无法确定其变化范围。

（2）$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}5/3 & -1/6 & 0\\ -2/3 & 1/6 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\5\\6+\Delta a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/6\\1/6\\4+\Delta a_{33}\end{pmatrix}$。由于 x_3 在最终单纯形表中为非基变量，则只需计算其检验数。

$$\sigma_3=4-6\times5/6-10\times1/6=-8/3$$

说明 Δa_{33} 为任何值，最优解均不改变。

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}5/3 & -1/6 & 0\\ -2/3 & 1/6 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\5+\Delta a_{23}\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/6-\Delta a_{23}/6\\1/6+\Delta a_{23}/6\\4\end{pmatrix}$$

检验数为

$$\sigma_3=4-6\times(5/6-\Delta a_{23}/6)-10\times(1/6+\Delta a_{23}/6)=-8/3-2/3\Delta a_{23}$$

只要 $\sigma_3\leqslant0$ 即可保证最优解不变，即 $\Delta a_{23}\geqslant-1$ 。

（3）假定一个新产品，其在最终单纯形表中的系数为

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}5/3 & -1/6 & 0\\ -2/3 & 1/6 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\6\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7/3\\-1/3\\6\end{pmatrix}$$

其检验数为 $\sigma_3=4-6\times\dfrac{7}{3}-10\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{20}{3}\leqslant0$ ，故不值得生产。只有该检验数大于零时，才说明该变量成为基变量，才可能生产。

3.3.4 参数规划

灵敏度分析主要讨论在最优基不变情况下，确定系数 a_{ij}、b_i、c_j 的变化范围。参数线性规划是研究这些参数中某一参数连续变化时，使最优解发生变化的各临界点的值。

解决参数规划的思路和单纯形法思路基本一致，主要步骤如下：

（1）对含有参数 α 的参数线性规划问题，令参数 $\alpha=0$ ，参数规划问题即可变成一般的线性规划问题，求出最优解。

（2）借助于灵敏度分析思路，将参数 α 代入最终单纯性表中。

（3）随着参数的变化，目标函数、资源、技术系数和检验数等可能发生改变，基于非基变量检验数小于或等于零，而 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 的最优解判定准则，分析参数变化导致最优解的改变。

（4）运用单纯形法或者对偶单纯形法求解，直到参数在（$-\infty$，∞）均被分析。

【例 3-10】针对【例 3-5】进行如下参数规划：

$$\max z=(10+3\alpha)x_1+(6+4\alpha)x_2+(4-\alpha)x_3$$

$$\text{s. t:}\begin{cases}x_1+x_2+x_3\leqslant100\\10x_1+4x_2+5x_3\leqslant600\\2x_1+2x_2+6x_3\leqslant300\\x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant0\end{cases}$$

【解】首先假定 $\alpha=0$，求出线性规划模型的最优解，其单纯形表见表 3-14。

表 3-14　最终单纯形表

			10	6	4	0	0	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
6	x_2	200/3	0	1	5/6	5/3	−1/6	0
10	x_1	100/3	1	0	1/6	−2/3	1/6	0
0	x_6	100	0	0	4	−2	0	1
	$-z$		0	0	−8/3	−10/3	−2/3	0

将目标函数替换为 $(10+3\alpha)x_1+(6+4\alpha)x_2+(4-\alpha)x_3$，于是单纯形表变为表 3-14。

表 3-14　最终单纯形表

			$10+3\alpha$	$6+4\alpha$	$4-\alpha$	0	0	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$6+4\alpha$	x_2	200/3	0	1	5/6	5/3	−1/6	0
$10+3\alpha$	x_1	100/3	1	0	1/6	−2/3	1/6	0
0	x_6	100	0	0	4	−2	0	1
	$-z$		0	0	$-\frac{8}{3}-\frac{29}{6}\alpha$	$-\frac{10}{3}-\frac{14\alpha}{3}$	$-\frac{2}{3}+\frac{\alpha}{6}$	0

如果最优解不变，则 $-\frac{8}{3}-\frac{29}{6}\alpha\leqslant 0$，$-\frac{10}{3}-\frac{14\alpha}{6}\leqslant 0$，$-\frac{2}{3}+\frac{\alpha}{6}\leqslant 0$，于是 $-\frac{16}{29}\leqslant\alpha\leqslant 4$。

在此范围内，线性规划问题的最优解不变，为 $\left(\frac{100}{3},\frac{200}{3},0,0,0,100\right)$。

考虑到问题的现实性，价值系数不可能为负，即 $10+3\alpha\geqslant 0$，$6+4\alpha\geqslant 0$，$4-\alpha\geqslant 0$，则 $-\frac{3}{2}\leqslant\alpha\leqslant 4$。接着需要区间 $\left[-\frac{3}{2},-\frac{16}{29}\right]$ 内最优解的变化。此时 $-\frac{16}{29}$ 为第一临界点。

在区间 $\left[-\frac{5}{7},-\frac{16}{29}\right]$ 内 $\left(-\frac{10}{3}-\frac{14\alpha}{3}\leqslant 0\text{ 得到 }-\frac{5}{7}\right)$，有 $-\frac{8}{3}-\frac{29}{6}\alpha\geqslant 0$。对表 3-14 实行迭代，得到表 3-15。

在区间 $\left[-\frac{56}{85},-\frac{16}{29}\right]$ 内，$-\frac{14}{3}-\frac{85\alpha}{12}\leqslant 0$，$-\frac{2}{3}+\frac{\alpha}{6}\leqslant 0$，$\frac{2}{3}+\frac{29\alpha}{24}\leqslant 0$，此时，最优解为 $\left(\frac{175}{6},\frac{225}{6},25,0,0,0\right)$，$-\frac{56}{85}$ 为第二临界点。

在区间 $\left[-\frac{5}{7},-\frac{56}{85}\right]$ 内，$-\frac{14}{3}-\frac{85\alpha}{12}>0$，继续迭代，有表 3-15。

表 3-15　第一次迭代单纯形表

			$10+3\alpha$	$6+4\alpha$	$4-\alpha$	0	0	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$6+4\alpha$	x_2	225/6	0	1	0	25/12	−1/6	−5/24
$10+3\alpha$	x_1	175/6	1	0	0	−7/12	1/6	−1/24
$4-\alpha$	x_3	25	0	0	1	−0.5	0	0.25
	$-z$		0	0	0	$-\frac{14}{3}-\frac{85\alpha}{12}$	$-\frac{2}{3}+\frac{\alpha}{6}$	$\frac{2}{3}+\frac{29\alpha}{24}$

表 3-16　第二次迭代单纯形表

			$10+3\alpha$	$6+4\alpha$	$4-\alpha$	0	0	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	18	0	12/25	0	1	−2/25	−1/10
$10+3\alpha$	x_1	119/3	1	7/25	0	0	3/25	−1/10
$4-\alpha$	x_3	34	0	6/25	1	0	−1/25	1/5
	$-z$		0	$\frac{56}{25}+\frac{85}{25}\alpha$	0	0	$-\frac{26}{25}-\frac{2}{5}\alpha$	$\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\alpha$

在区间 $\left[-\frac{5}{7},\ -\frac{56}{85}\right]$ 内，$\frac{56}{25}+\frac{85}{25}\alpha \leqslant 0$，$-\frac{26}{25}-\frac{2}{5}\alpha \leqslant 0$，$\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\alpha \leqslant 0$。说明此时最优解为 $\left(\frac{119}{3},\ 0,\ 34,\ 18,\ 0,\ 0\right)$。

如果现实中目标函数系数的符号没有限制，则需要继续分析 $\left[-\infty,\ -\frac{5}{7}\right]$ 和 $[4,\ \infty]$ 区间内的解。读者可以自行完成。

【例 3-11】针对【例 3-5】进行如下的参数规划：

$$\max z = 10x_1 + 6x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 100 + \alpha \\ 10x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 600 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leqslant 300 - 2\alpha \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

【解】首先假定 $\alpha = 0$，求出线性规划模型的最优解，其单纯形表见表 3-17。

表 3-17　最终单纯形表

			10	6	4	0	0	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
6	x_2	200/3	0	1	5/6	5/3	−1/6	0
10	x_1	100/3	1	0	1/6	−2/3	1/6	0
0	x_6	100	0	0	4	−2	0	1
	$-z$		0	0	−8/3	−10/3	−2/3	0

由于本例中 $\boldsymbol{b}$ 列为资源，必须保证资源量为非负，所以 $-100 \leqslant \alpha \leqslant 150$。

计算 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5/3 & -1/6 & 0 \\ -2/3 & 1/6 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100+\alpha \\ 600 \\ 300-2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{200}{3}+\frac{5}{3}\alpha \\ \frac{100}{3}-\frac{2}{3}\alpha \\ 100-4\alpha \end{pmatrix}$，要使得最优解不变，即 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geqslant 0$，也即 α 在 $[-40,\ 25]$ 内最优解不变。说明 25 为第一临界点。在 $[25,\ 50]$ 内，$100-4\alpha < 0$。采用对偶单纯形法进行迭代，结果见表 3-18。

表 3-18　第一次迭代的单纯形表

			10	6	4	0	0	0
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
6	x_2	$\frac{450}{3}-\frac{5}{3}\alpha$	0	1	25/6	0	−1/6	5/6
10	x_1	$\frac{2}{3}\alpha$	1	0	−1/6	0	1/6	−1/3
0	x_4	$-50+2\alpha$	0	0	−2	1	0	−0.5
	$-z$		0	0	−58/3	0	−2/3	−5/3

在内[25, 90], $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$。如果在[90, ∞]内,则 $\frac{450}{3}-\frac{5}{3}\alpha<0$。此时,90 为第二临界点。迭代的结果见表 3-19。

表 3-19　第一次迭代的单纯形表

			10	6	4	0	0	0
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_5	$10\alpha-900$	0	−6	−25	0	1	−5
10	x_1	$150-\alpha$	1	1	4	0	0	1/2
0	x_4	$-50+2\alpha$	0	0	−2	1	0	−0.5
	$-z$		0	−4	−36	0	0	−5

当 α 在[90, 150]内时,有 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$。由于本例中 α 上限为 150,如果没有上限,还需按照上面方式继续迭代。−40 为第三临界点。

在 [−100, −40] 内, $\frac{200}{3}+\frac{5}{3}\alpha<0$。依据单纯形表 3-17, 进行迭代, 得到表 3-20。

表 3-20　依据表 3-17 的第二次迭代单纯形表

			10	6	4	0	0	0
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_5	$-400-10\alpha$	0	−6	−5	−10	1	0
10	x_1	$100+\alpha$	1	1	1	1	0	0
0	x_6	$100-4\alpha$	0	0	4	−2	0	1
	$-z$		0	−4	−6	−10	0	0

因此, 在[−100, −40]内, $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$。上述即为最优解。如果题目没有限制,还需要分析[−∞, −100]内的最优解。

本章要点

熟练掌握单纯形法的矩阵描述, 将有助于对单纯形法的理解, 也有助于进行对偶理论和灵敏度分析, 尤其要注意识记单纯形法中非基变量的检验数的矩阵表示。了解改进单纯形法的计算过程, 关键是计算基变量的系数矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}$。

对偶理论及其基本性质是本章的重点。了解对偶关系的建立背景, 熟练掌握原问题与对偶问题的关系, 将能够根据原问题直接写出其对偶问题。对偶问题的几条基本性质是本章的理论支持, 也是对线性规划问题对偶关系的最好诠释, 应该熟练掌握。

影子价格是投资项目经济评价的重要参数, 它是指社会处于某种最优状态下, 能够反映

社会劳动消耗、资源稀缺程度和最终产品需求状况的价格。具体到线性规划问题，影子价格就是其他条件不变的情况下，单位资源变化所引起的目标函数的最优值的变化。影子价格是对偶问题的经济解释，也是对偶理论最具现实意义的应用。

灵敏度分析，简单地讲就是线性规划问题中一项参数的改变对目标函数值变化的影响。在最优化方法中经常利用灵敏度分析来研究原始数据不准确或发生变化时最优解的稳定性。通过灵敏度分析还可以决定哪些参数对系统或模型有较大的影响。读者应学会分析资源数量的变化、目标函数中价值系数变化以及技术系数的变化对目标函数最优解变化的影响，掌握相应的运算方法。

关键公式

- 线性规划单纯形法非基变量的检验数的矩阵描述

$$\boldsymbol{C}_{N_1} - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}_1 \text{ 和 } -\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}$$

其中，C 是目标函数的系数；$\boldsymbol{B}$ 是基变量的系数矩阵；$\boldsymbol{N}$ 是非基变量的系数矩阵。

- 原问题与对偶问题的矩阵描述

原问题：

$$\max z = \boldsymbol{CX}$$

$$\text{s.t}: \begin{cases} \boldsymbol{AX} \leqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant 0 \end{cases}$$

对偶问题：

$$\min w = Yb$$

$$\text{s.t}: \begin{cases} \boldsymbol{YA} \geqslant \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{Y} \geqslant 0 \end{cases}$$

- 对偶单纯形法中的最小比值规则

$$\theta = \min_i \left[\frac{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_i}{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j)_i} (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j)_i > 0 \right] = \frac{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_i}{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j)_i}$$

案例解析

假设生产初级产品质量为 x_1，A、B 用于替代方案的质量分别为 x_2、x_3，则用于初级产品生产的 A、B 的质量分别为 x_1、$2x_1$，初级产品生产过程中产生液体废料的质量为 $2x_1$。

替代方案 1 中，1 lb A 有 1 lb 的废料，替代方案 2 中，1 lb B 有 1 lb 的废料，故两种方案中的废料量应与 A、B 用量分别相等。

收入：$5.7x_1 + 2x_2 \times 0.85 + 2x_3 \times 0.65$；

A 的成本：$1.5(x_1 + x_2)$；

B 的成本：$0.8(2x_1 + x_3)$；

生产初级产品的劳动力成本：$0.5x_1$；

K 和 M 的直接劳务费用：$0.2 \times 2x_2$ 和 $0.1 \times 2x_3$；

液体废料的特殊处理费用：$0.25(2x_1 - x_2 - x_3)$。

于是，如果不考虑固定成本，则规划模型为：

$$\max z = 1.6x_1 + 0.05x_2 + 0.55x_3$$

$$\text{s.t}: \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 5000 \\ 2x_1 + x_3 \leqslant 7000 \\ x_2 + x_3 - 2x_1 \leqslant 0 \\ x_2,\ x_3,\ x_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

(1)采用单纯形法求解，其单纯形表见表 3-21。

表 3-21　初始单纯形表

			1.6	0.05	0.55	0	0	0	θ
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	5000	1	1	0	1	0	0	5000
0	x_5	7000	[2]	0	1	0	1	0	3500
0	x_6	0	−2	1	1	0	0	1	−
	$-z$		1.6	0.05	0.55	0	0	0	

于是,第一次迭代的单纯形表见表 3-22。

表 3-22　第一次迭代的单纯形表

			1.6	0.05	0.55	0	0	0	θ
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	1500	0	[1]	−0.5	1	−0.5	0	1500
1.6	x_1	3500	1	0	0.5	0	0.5	0	
0	x_6	7000	0	1	2	0	1	1	7000
	$-z$		0	0.05	−0.25	0	−0.8	0	

第二次迭代的单纯形表见表 3-23。

表 3-23　第二次迭代的单纯形表

			1.6	0.05	0.55	0	0	0	θ
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0.05	x_2	1500	0	1	−0.5	1	−0.5	0	
1.6	x_1	3500	1	0	0.5	0	0.5	0	
0	x_6	5500	0	0	2.5	−1	1.5	1	
	$-z$		0	0	−0.225	−0.05	−0.775	0	

该表格的检验数全部小于或等于零，且 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} > 0$，满足单纯形表迭代终止条件，故为最终单纯形表，最优解为（3500，1500，0，0，0，5500）。

(2)在利润贡献中，初级产品生产 3500 lb，K 生产 1500 lb，而 M 没有生产也就无贡献。

(3)由互补松弛性定理可得，A、B 的影子价格分别为 0.05 和 0.775。

(4) c_1 的灵敏度分析见表 3-24。

表 3-24　最终单纯形表

			$\Delta c_1+1.6$	0.05	0.55	0	0	0
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0.05	x_2	1500	0	1	−0.5	1	−0.5	0
$\Delta c_1+1.6$	x_1	3500	1	0	0.5	0	0.5	0
0	x_6	5500	0	0	2.5	−1	1.5	1
	$-z$		0	0	$-0.225-0.5\Delta c_1$	−0.05	$-0.775-0.5\Delta c_1$	0

于是，$\Delta c_1 \geqslant -0.45$。

c_2 的灵敏度分析见表 3-25。

表 3-25　最终单纯形表

			1.6	$\Delta c_2+0.05$	0.55	0	0	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$\Delta c_2+0.05$	x_2	1500	0	1	−0.5	1	−0.5	0
1.6	x_1	3500	1	0	0.5	0	0.5	0
0	x_6	5500	0	0	2.5	−1	1.5	1
	$-z$		0	0	$-0.225+0.5\Delta c_2$	$-0.05-\Delta c_2$	$-0.775+0.5\Delta c_2$	0

于是，$-0.05 \leqslant \Delta c_2 \leqslant 0.45$。

c_3 的变化只会对影响其自身检验数，即 $\Delta c_3 \leqslant 0.225$ 。

这个建议不合理，因为 K 的数量就是 x_2 ，如果去掉，则其线性规划模型将会改变。

将线性规划模型改变为

$$\max z = 1.6x_1 + 0.55x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 \leqslant 5000 \\ 2x_1 + x_3 \leqslant 7000 \\ x_3 - 2x_1 \leqslant 0 \\ x_3,\ x_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

用单纯形法求解的结果是 $x_1 = 3500$，$x_3 = 0$ 。

下面介绍采用 LINGO 软件和 Excel 软件进行灵敏度分析的基本过程。

如果采用 LINGO 软件，首先运行软件，并在空白处输入程序(如图 3-3 所示)：

```
max =1.6* x1 +0.05* x2 +0.55* x3;
x1 +x2 < =5000;
2* x1 +x3 < =7000;
x2 +x3 -2* x1 < =0;
x1 > =0;
x2 > =0;
x3 > =0;
```

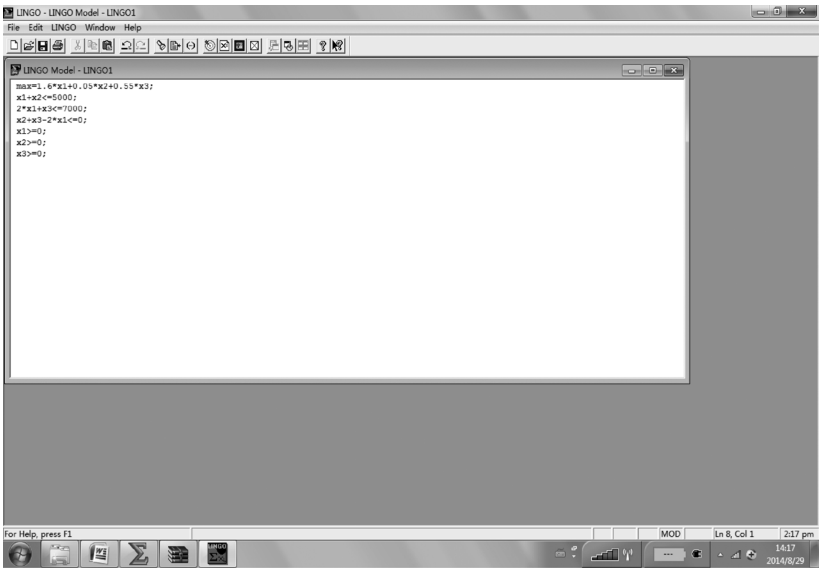


图 3-3

接着，单击工具栏中“LINGO”菜单的“Solve”命令项，如图 3-4 所示。

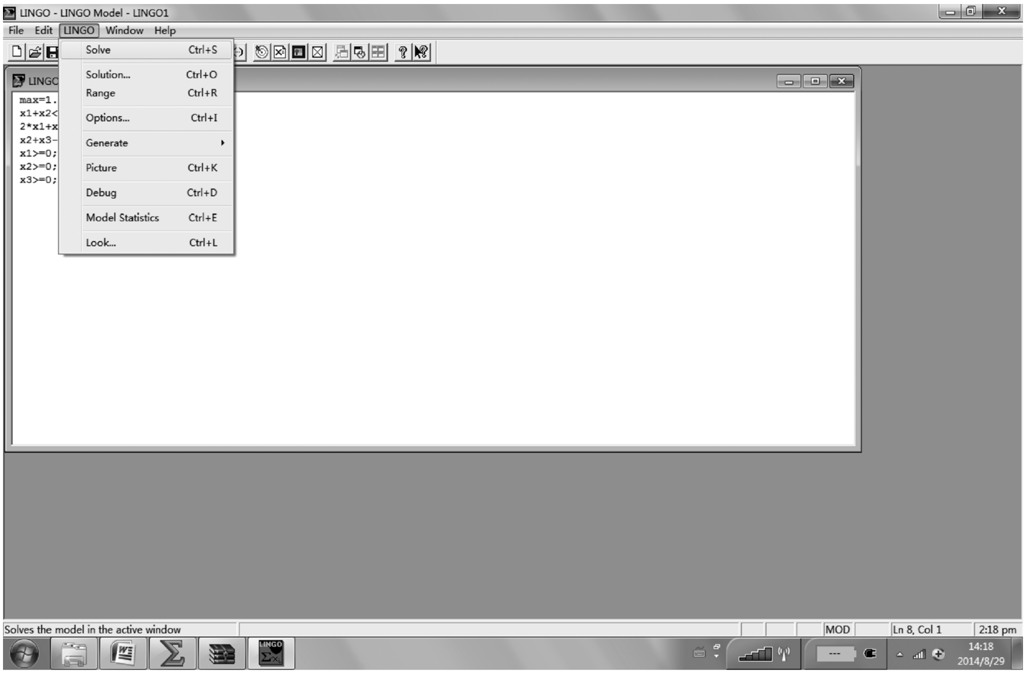


图 3-4

求解的结果和灵敏度的分析如图 3-5 所示。

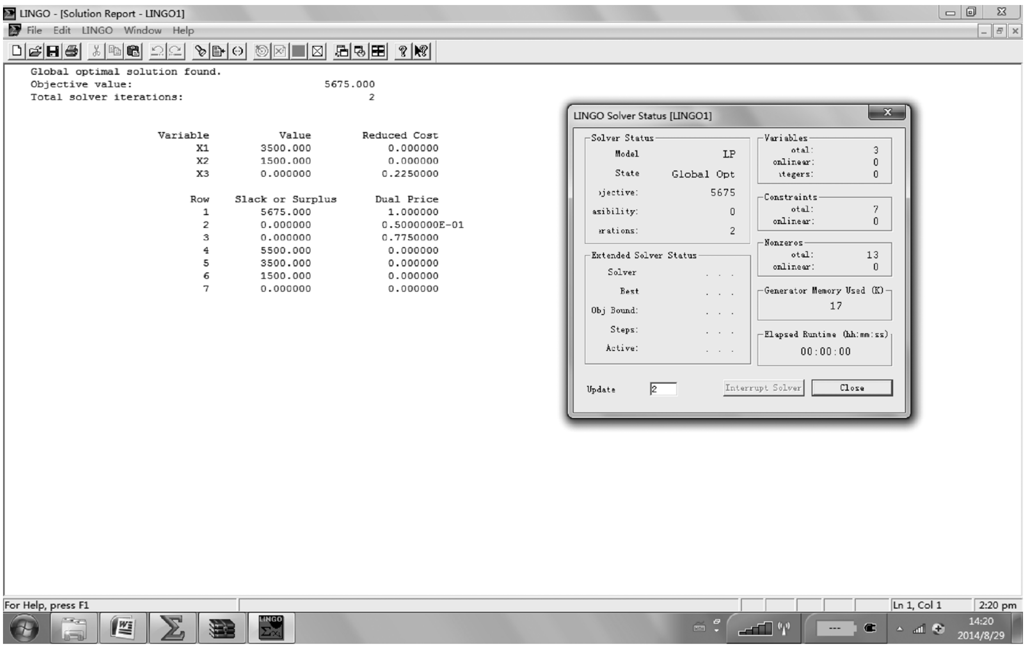


图 3-5

如果采用 Excel 软件求解，则主要步骤如下：

(1)运行 Excel 软件，单击“工具”菜单中的“加载宏”命令项，选中“规划求解”命令，单击“确定”按钮，此时在“工具”菜单中就会出现“规划求解”命令项。

(2)在 Excel 软件界面的任意单元格中，输入线性规划模型的常量，如图 3-6 所示。

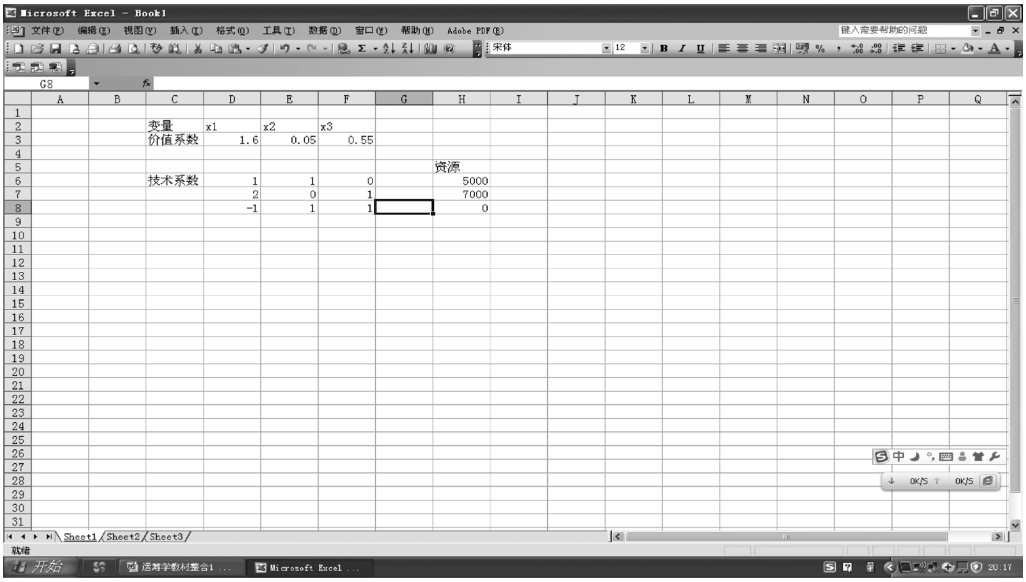


图 3-6

(3)确定可变单元格，即计算机求解各个变量的结果所放置的单元格，采用 SUMPRODUCT 函数确定约束不等式左边的值，并确定目标函数单元格，也采用 SUMPRODUCT 函数计算。例如，计算 $x_1 + x_2$，如图 3-7 所示。

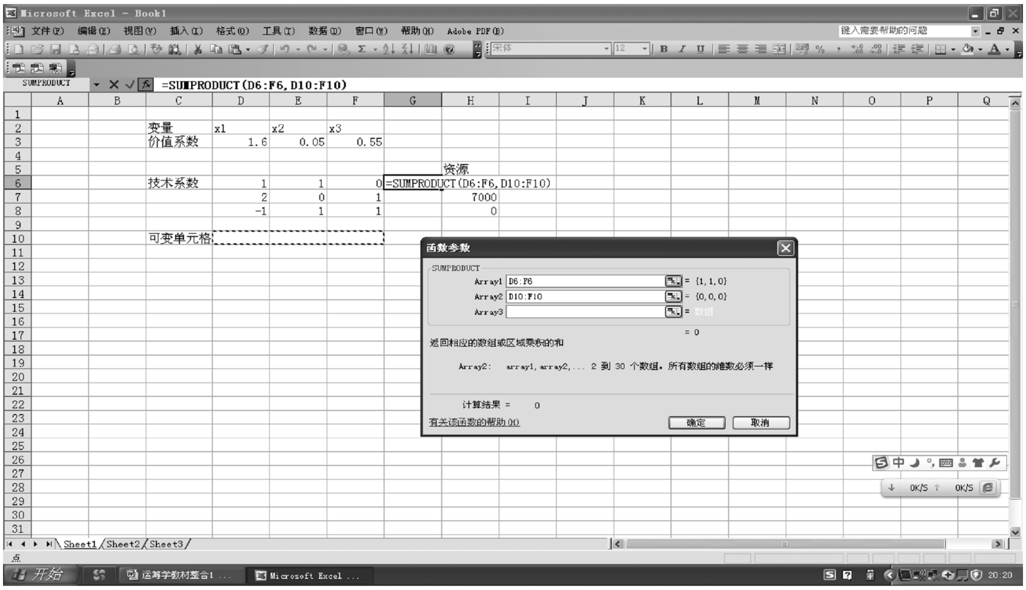


图 3-7

而目标单元格的计算如图 3-8 所示。

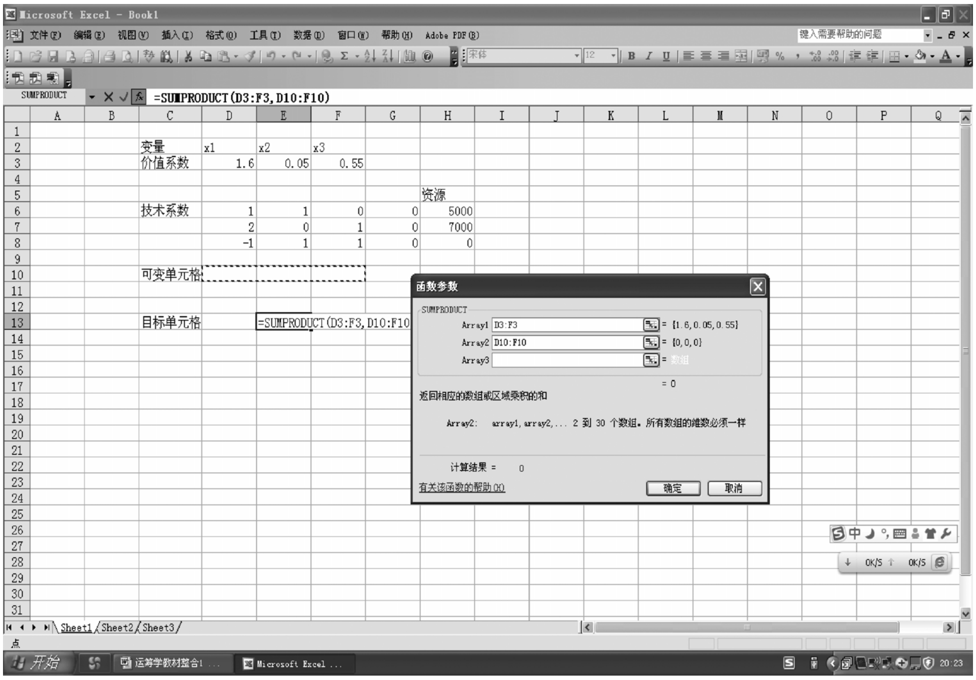


图 3-8

(4)单击“工具”菜单项的“规划求解”命令项，打开“规划求解参数”对话框，按照要求选中目标函数、目标函数类型、可变单元格和约束条件，如图 3-9 所示。

图 3-9

单击“选项”按钮，选中“采用线性模型”、“假定为非负”，运算时间和迭代次数等可以人为设定，单击“确定”按钮，然后单击“求解”按钮，如图 3-10 所示。

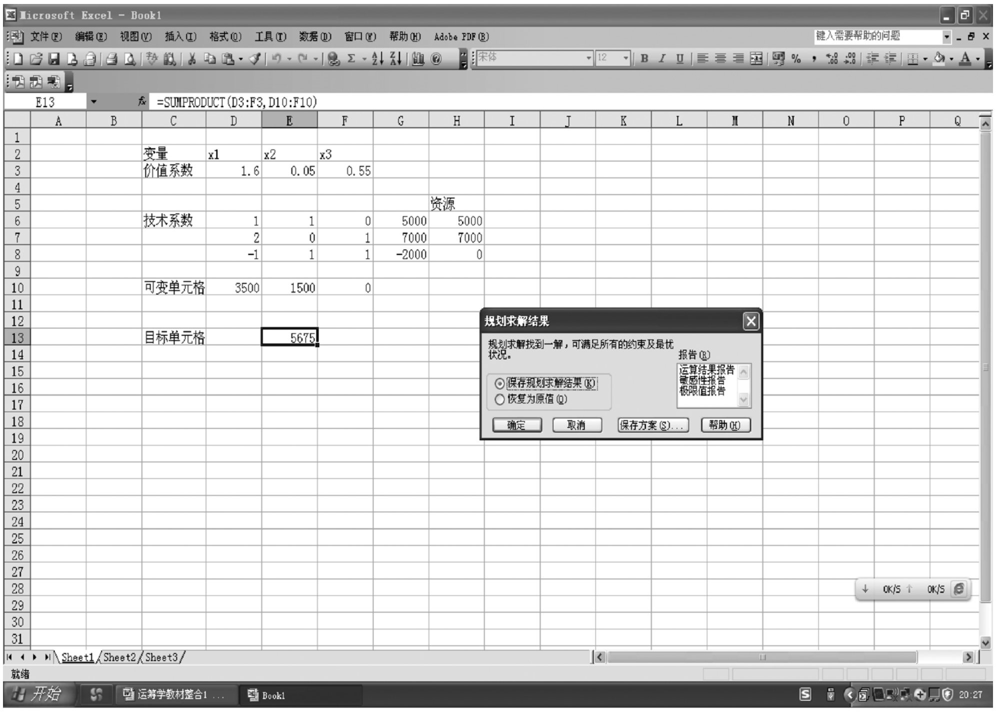


图 3-10

此时，会出现一个“规划求解结果”对话框，在其右侧有“敏感性分析报告”，选中之后，单击“确定”按钮即可。这时，在 Excel 表格的下方会出现一个新的 Excel 文件，描述敏感性分析结果，如图 3-11 所示。

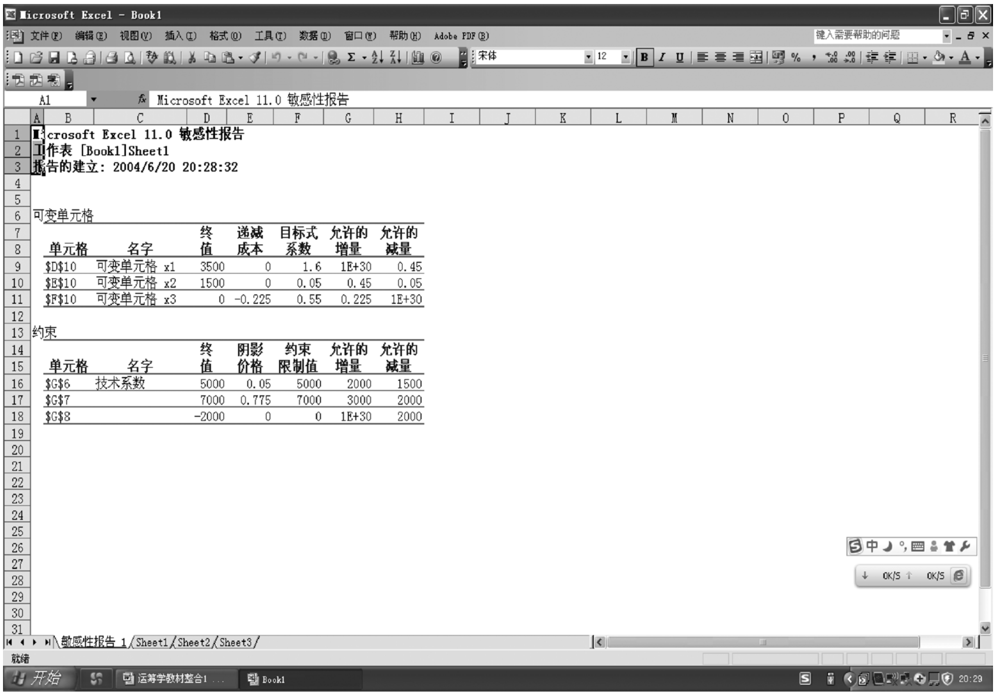


图 3-11

练习题

1. 写出如下线性规划模型的对偶模型：

(1)
$$\max z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$
$$\text{s.t:}\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \geqslant 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_4 \leqslant 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \text{ 无符号限制} \end{cases}$$

(2)
$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{s.t:}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i (i = 1, 2, \cdots, m_1) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i (i = m_1 + 1, \cdots, m_2) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i (i = m_2 + 1, \cdots, m) \\ x_j \leqslant 0 (j = 1, \cdots, n_1) \\ x_j \geqslant 0 (j = n_1 + 1, \cdots, n_2) \\ x_j \text{ 无约束} (j = n_2 + 1, \cdots, n) \end{cases}$$

(3)
$$\min z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$$
$$\text{s.t:}\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geqslant 2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \leqslant 0,\ x_3 \text{ 无符号限制} \end{cases}$$

2. 某厂生产甲、乙、丙三种产品，已知有关数据见表 3-26。

表 3-26　资源消耗表

	甲	乙	丙	原料拥有量
A	6	3	5	45
B	3	4	5	30
单件利润	4	1	5	

(1) 建立线性规划模型，求使该厂获利最大的生产计划。

(2) 若产品乙、丙的单件利润不变，则产品甲的利润在什么范围内变化时，上述最优解不变?

(3) 若有一种新产品丁，其原料消耗定额：A 为 3 单位，B 为 2 单位，单件利润为 2.5 单位。问该种产品是否值得安排生产? 并求新的最优计划。

3. 已知线性规划问题

$$\max z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 6 \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 4 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

先用单纯形法求解，再分析在下列条件单独出现的情况下最优解的变化：

(1)目标函数变为 $\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$ ；

(2)约束条件右端项由 $\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ 变为 $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ ；

(3)增添一个新的约束条件 $-x_1 + 2x_2 \geqslant 2$ 。

4. 已知线性规划问题

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} x_1 \leqslant 8 \\ x_2 \leqslant 6 \\ 3x_2 + 4x_2 \leqslant 36 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(1)使用单纯形法求解。

(2)试确定第 2 约束不等式右端常数 b_2 在什么范围内变化时最优解不变。

(3)当 b_2 变为 24 时，最优解有何变化？

(4)试给出该问题中各个资源的影子价格(三个约束条件分别表示三种资源)。

(5)试确定甲产品单件利润 c_1 的变化范围(两个变量分别表示甲、乙两种产品)。

(6)若还有一种新产品丙，每件消耗 A、B、C 工时数分别是 1、3/2、1，单件利润为 1.5 元，问在现有生产能力下，丙产品是否值得生产？

5. 某出版单位有 4500 个空闲印刷机工时和 4000 个空闲装订工时，用于四种图书的装订和印刷(允许解可以不为整数)，具体数据见表 3-27。

表 3-27　印刷和装订数据表

	1	2	3	4	拥有量/ ×1000
印刷	0.1	0.3	0.8	0.4	4.5
装订	0.2	0.1	0.1	0.3	4
预期利润/(元/册)	1	1	4	3	

用单纯形法得到的最终单纯形表见表 3-28。

表 3-28　最终单纯形表

			1	1	4	3	0	0
C_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	x_1	5	1	−1	−4	0	−0.6	0.8
3	x_4	10	0	1	3	1	0.4	−0.2
	$-z$		0	−1	−1	0	−0.6	−0.2

(1)根据市场调查，第四种书最多只销售 5000 册，销量多于 5000 册时，超量的部分每册降价 2 元，求最优计划安排。

(2)经理对不出版第二种书有很大的意见，要求该书必须出版 2000 册，求此条件下的最优解。

(3)作为替代方案，第二种书仍然出版 2000 册，印刷由该厂承担，装订工序交给其他厂完成，但是装订每册的成本比该厂高 0.5 元，求新的最优解?

(4)出版第二种书的另外一个方案是提高售价，如果第二种书的印刷装订成本合计每册 6 元，该书的售价多高时候，出版才有利润?

第 4 章　运 输 问 题

本章概要

学习目标　学完本章后，你将能够：

1. 识别运输问题并建立运输问题的数学模型。
2. 运用表上作业法求解运输问题的最优解。
3. 分析运输问题的特征并进行建模。

运输问题的例子

道格拉斯・温斯顿十分担忧。公司的成本正在迅速地增长而利润却没有得到同样的增长。如果这种趋势继续发展下去，股东们会对下一个收益报告非常不满。作为 P&T 公司的首席执行官，他知道是资金上出了问题。他已经找出了一种控制成本的方法。道格拉斯突然拿起了电话，打给他的配送经理理查德・鲍沃斯。

道格拉斯(CEO)：理查德，我是道格拉斯。

理查德(配送经理)：你好，道格拉斯。

道格拉斯：理查德，刚才我正在仔细研究一些成本数据，一个数据令我非常吃惊。

理查德：是吗？什么数据？

道格拉斯：我们的豌豆罐头的运输成本，上个季度是 178000 美元。我记得在几年前这个数字还只是 100000 美元。这是怎么回事？

理查德：是的，你说得对。这些成本确实一直在上升。其中一个因素就是我们的运量增长了一点，但主要原因还是我们雇佣的货车司机的要价暴涨了许多。对于这一点，我们也抱怨过，但是他们却说是他们和代表司机的工会之间的新合同使他们的成本增长了很多，而且他们的保险费用也上升了。

道格拉斯：你有没有考虑过重新找一些货车司机呢？

理查德：当然考虑过，事实上，我们已经为即将来临的下季度找到了新的货车司机。

道格拉斯：好的，那么下个季度我们的运输成本是不是会下降很多呢？

理查德：我们的计划是这一成本保持在 165000 美元左右。

道格拉斯：哦，这还是太高。

理查德：但这已经是我们所能够得到的最好结果了。

道格拉斯：好吧，让我们从另外一个角度看这个问题。你是不是从我们的三个罐头厂把豌豆罐头运送到我们的四个仓库中？

理查德：是的。

道格拉斯：那你是如何确定从罐头厂到仓库的成本的？

理查德：我们有一个使用了很多年的标准策略。

道格拉斯：这个策略能够使你的总运输成本达到最低吗？

理查德：我想在这方面这个策略已经发挥了极好的作用。

道格拉斯：但是这个策略是否使用了运筹学算法生成保证总运输成本最低的运输计划？

理查德：不，不是这样的。我想我们还做不到这一点。有什么办法可以那样做吗？

道格拉斯：是的，我想管理科学技术可以帮助我们做到这一点。这是我在面试我们上个月聘用的 MBA 毕业生金・贝克时学到的。金认为这项技术能直接用于我们公司。我们聘用金就是希望他能帮助我们将商学院教授最好的技术应用到公司。我认为我们应该把你的运输计划提交给金，看看她是不是能够对这个计划做一些改进。

理查德：有道理。

道格拉斯：那好吧。我想你最好和金联系一下并尽快给我一份报告。

理查德：好的。

谈话很快结束了。

公司的单位运价表和产销平衡表分别见表 4-1 和表 4-2。

表 4-1　单位运价表　（单位：美元 / 车）

至 从	萨克拉门托	盐湖城	赖皮特城	奥尔巴古
贝林翰	464	513	654	867
尤基尼	352	416	690	791
艾尔贝·李	995	682	388	685

表 4-2　产销平衡表　（单位：车）

至 从	萨克拉门托	盐湖城	赖皮特城	奥尔巴古	产量
贝林翰					75
尤基尼					125
艾尔贝·李					100
分配量	80	65	70	85	

金立即就意识到这个问题是一个典型的运输问题，可直接使用运筹学方法对这个问题进行规划，并且使用计算机软件可以很快得到一个最优解方案。这就使得金在第二天就能够将新的运输计划提交给管理层。那么金真的能够制定出一个新的运输计划，使运输成本下降到一个绝对最小值吗？

4.1　运输问题的类型

在经济建设中，经常碰到大宗物资调运问题。例如，煤、钢铁、木材、粮食等物资，在全国有若干生产基地，根据已有的交通网，应如何制定调运方案，将这些物资运到各消费地点，而总运费要最小？

4.1.1　产销平衡的运输问题

假定有 m 个生产地点 A_i，$i=1, 2, \cdots, m$ 可供应某种物资，其供应量(产量)分别为 $a_i(i=1, 2, \cdots, m)$，有 n 个销地 $B_j(j=1, 2, \cdots, n)$，其需要量分别为 $b_j(j=1, 2, \cdots, n)$，从 A_i 到 B_j 运输单位物资的运价(单价)为 c_{ij}。于是，产销平衡的运输问题用表格可以表示为表 4-3。

表 4-3　产销平衡的运输问题的表格表示

销地 产地	B_1	…	B_n	产量
A_1	c_{11}	…	c_{1n}	a_1
⋮	⋮	…	⋮	⋮
A_m	c_{m1}	…	c_{mn}	a_m
销量	b_1	…	b_n	

若用 x_{ij} 表示从 A_i 到 B_j 的运量，那么在产销平衡的条件下，要求得总运费最小的调运方案，其规划模型可以表示为

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t:} \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, \cdots, n \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, \cdots, m \\ x_{ij} \geqslant 0 \end{cases}$$

上述模型包含 $m\times n$ 个变量、$m+n$ 个约束方程。其系数矩阵可以表示为

$$
\begin{array}{c}
\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{array} \\
\left.\begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & & & \ddots & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & & 1
\end{pmatrix}\right\}
\begin{matrix} m\text{ 行} \\ \\ n\text{ 行} \end{matrix}
\end{array}
$$

该系数矩阵中对应于变量 x_{ij} 的系数向量 $\boldsymbol{P}_{ij}$，其分量中除第 i 个和第 $m+j$ 个为 1 以外，其余的都为零。即 $\boldsymbol{P}_{ij}=(0\cdots1\cdots0\cdots1\cdots0)^{\mathrm{T}}=e_i+e_{m+j}$。

对产销平衡的运输问题，由于 $\sum\limits_{j=1}^{n}b_j=\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}\right)=\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}\right)=\sum\limits_{i=1}^{m}a_i$，所以上述系数矩阵中肯定有一个是多余的，即模型最多只有 $m+n-1$ 个独立约束方程，系数矩阵的秩小于或等于 $m+n-1$。

4.1.2　产销不平衡的运输问题

上述运输问题都要求总产量等于总销量，因而也称为产销平衡的运输问题。产销不平衡的运输问题是指总产量不等于总销量的运输问题，这类问题更为常见。

如果产量大于销量，说明有一部分产量为库存，暂时无法销售，则其运输模型为

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j(j=1,\cdots,n)\\ \sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant a_i(i=1,\cdots,m)\\ x_{ij}\geqslant 0\end{cases}$$

如果销量大于产量，说明供不应求，则其运输模型可以表示为

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}\leqslant b_j(j=1,\cdots,n)\\ \sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i(i=1,\cdots,m)\\ x_{ij}\geqslant 0\end{cases}$$

为了能够采用产销平衡的运输问题求解算法解决产销不平衡的运输问题，通常需要把不平衡的运输问题化成平衡的运输问题。其主要的方法是增加一个假想的产地或者销地。

如果产量大于销量，就要考虑多余物资的储存问题。假设一个销地 B_{n+1} ，可以将其理解为企业仓库或者中转站。令 $x_{i,n+1}$ 是产地 A_i 产品需要的储存量，于是有

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1, \cdots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = b_{n+1}$$

假定各个产地到销地 B_{n+1} 的单位运费分别为 $c_{i,n+1}$ ，其运输模型为

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} c_{i,n+1}x_{i,n+1}$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j (j = 1, \cdots, n+1) \\ \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i (i = 1, \cdots, m) \\ x_{ij} \geqslant 0\end{cases} \tag{4-1}$$

其中，$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j + b_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} b_j$ 。

如果所有产地到假想地的运费均为零，则模型(4-1)可以简化为：

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j (j = 1, \cdots, n+1) \\ \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i (i = 1, \cdots, m) \\ x_{ij} \geqslant 0\end{cases}$$

如果销量大于产量，则可以假想一个产地，也可以理解为从库存取出进行销售。假定从假想的产地到各个销地的单位运费分别为 $c_{m+1,j}$ ，运量为 $x_{m+1,j}$ ，其运输模型为

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} c_{m+1,j}x_{m+1,j}$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j (j = 1, \cdots, n) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i (i = 1, \cdots, m+1) \\ x_{ij} \geqslant 0\end{cases} \tag{4-2}$$

其中，$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m+1} a_i$ 。如果所有产地到假想产地的运费均为零，则模型(4-2)可以简化为

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t}: \begin{cases} \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j (j = 1, \cdots, n) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i (i = 1, \cdots, m+1) \\ x_{ij} \geqslant 0 \end{cases}$$

4.1.3　有转运的运输问题

在实际问题中，通常物品需要先由产地运输到某个中间转运站（可能是另外的产地、销售地或者中转仓库、配送中心等），然后再转运到相应的销地。在某些情形下，通过转运可能节约运费，比直接运输更为经济合理。例如，沃尔玛，该企业在全球建立了多家配送中心，大大节约了物流成本。

假定 m 个产地 A_i（$i = 1, 2, \cdots, m$）和 n 个销地 B_j（$j = 1, 2, \cdots, n$）均可以作为中转站使用，因此发送物品的地点不仅仅是产地，还包括销地，有 $m + n$ 个，接受物品的地点也有 $m + n$ 个。

产地 A_i 发送到各个地方的物品数量之和，等于该地的产量加上经过它转运的物品数量。各地运输到 B_j 的物品数量之和，等于它的净需要量加上转运量。在建立模型中，除了考虑单位运价之外，通常还需要考虑各个地点转运单位物品的相关费用。

有转运的运输问题也可以化简为产销平衡的运输问题，主要步骤如下：

（1）所有产地、销地、转运站同时看作产地和销地。

（2）运输表中不可能方案的运费取作 M（一个足够大的数），自身对自身的运费为 0。

（3）经过转运点的物资量既是该点作为销地的需求量，又是该点作为产地的供应量，如果无法获取该数量的确切值，将调运总量作为该数值的上界。

下面引入一个例子来说明其转化过程。

【例 4-1】图 4-1 给出了一个运输系统，它包括两个产地①和②、两个销地④和⑤及一个中间转运站③，各产地产量和各销地的销量用相应节点旁边箭头上的数字表示，节点连线上的数字表示其间的运输单价，节点旁的数字为该地的转运单价，试将其转化为产销平衡的运输问题。

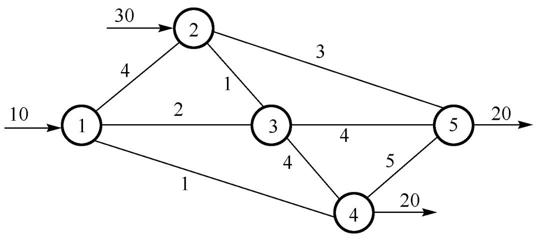


图 4-1　转运图

【解】本例为产销平衡的运输问题。转运量就是总的产量或总销量，为 10 + 30 = 20 + 20 = 40；产地有两个，其发送量等于其产量加转运量，其接收量等于转运量。

销地有两个，其接收量等于其销量加转运量，其发送量等于转运量，中转站的发送量与接受量均为转运量。

其运输表格可以表示为表4-4。

表4-4　有转运的运输问题的表格表示

		产地		转运站	销地		发送量
		1	2	3	4	5	
产地	1	0	4	2	1	M	50
	2	4	0	1	M	3	70
转运站	3	2	1	0	4	4	40
销地	4	1	M	4	0	5	40
	5	M	3	4	5	0	40
接收量		40	40	40	60	60	

如果采用上述单纯形法求解，由于变量较多，特别是可能需要引入人工变量，使求解的复杂性大大提高，因此需要建立一种新的求解算法。

4.2　运输问题的表上作业法

表上作业法是指用列表的方法求解运输模型的方法，也是一种单纯形法。当某些线性规划问题采用图上作业法难以进行直观求解时，就可以将各元素列成相关表，作为初始方案，然后采用检验数来验证这个方案，通过逐步迭代，直至得到满意的结果。

4.2.1　确定初始基可行解

表上作业法的具体应用步骤和单纯形法相同，可归纳如下：

(1)判断产销是否平衡，如果不平衡，需要增加假想的产地或者销地，形成产销平衡的运输表。

(2)找出初始基可行解。

(3)求各非基变量的检验数，判别是否达到最优解。如已是最优解，则停止计算，否则转到下一步。

(4)确定换入变量和换出变量，找到新的基可行解。

(5)重复(3)、(4)直到得到最优解为止。

在单纯形法中，确定初始基可行解就是在约束条件的系数矩阵中找到单位阵即可。运输问题中，系数矩阵中的系数只有1和0，行列的数量较多。下面介绍两种简便的初始基可行解的确定方法，即最小元素法和伏格尔法(最大差额法)。

1. 最小元素法

这种方法的基本思路是尽量满足运费最小的环节调运。从单位运价表中逐次地挑选最小元素，并比较产量和销量：产大于销时，划去该元素所在的列，在产销平衡表中填入销量；产小于销时，划去该元素所在的行，在产销平衡表中填入产量。

接着，在没有划去的元素中再找最小元素，比较产量和销量，划去相应的行或者列，直到在产销平衡表中填了$(m+n-1)$个数字，即给出了$(m+n-1)$个基变量的值。当然，这$(m+n-1)$个基变量对应的系数列向量是线性独立的。

综上所述，最小元素法的解题步骤如下：

(1)在运价表中找到最小运价c_{lk}(如果有几个最小元素，则任意选择一个即可)。

（2）将 A_l 的产品运输给 B_k，若 $a_l > b_k$，在产销平衡表相应的交叉格处填 b_k，同时划掉 k 列；若 $a_l < b_k$，在产销平衡表相应的交叉格处填 a_l，同时划掉 l 行。

重复上述步骤，直到分配完毕。

最小元素法的缺点是为了节省一的费用，有时会造成在其他处要多花几倍的运费。

2. 伏格尔法（最大差额法）

为了有效规避最小元素法的缺点，如果一个产地的产品不能按最小运费就近供应，就考虑次小运费，这就产生了运价的差额。差额越大，说明不能按最小运费调运时，运费增加越多。因而对差额最大处，就应当采用最小运费调运。

运用伏格尔法求初始基可行解的基本步骤如下：

（1）分别计算每行和每列最小元素和次小元素之间的差额，如果最小元素和次小元素相同，则差额为零。

（2）找出最大差额和其对应的最小元素（如果存在几个最大差额，则任意选择一个即可），比较该元素的产量和销量，若 $a_l > b_k$，在产销平衡表相应的交叉格处填 b_k，同时划掉 k 列；若 $a_l < b_k$，在产销平衡表相应的交叉格处填 a_l，同时划掉 l 行。

（3）再次计算划掉行列的余下元素的差额，重复上述步骤，直到分配完毕。

伏格尔法同最小元素法除在确定供求关系的原则上不同外，其余步骤相同。通常，伏格尔法给出的初始解比最小元素法给出的初始解更接近最优解。

【例 4-2】已知某种产品有三个产地 A_1、A_2、A_3，四个销地 B_1、B_2、B_3、B_4。其供需关系表和相应的运费见表 4-5。试找出其初始基可行解。

表 4-5 运价和产销量表

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	2	7	6	50
A_2	7	5	2	3	60
A_3	4	5	4	5	25
销量	60	40	20	15	

【解】首先判断如果采用最小元素法求初始基可行解，步骤如下：

（1）首先找到表 4-5 中的最小元素，即 2，可以选择任意一个 2，如 $A_1 \to B_2$。由于其对应的产量为 50，销量为 40，取最小值 40，填写在 $A_1 \to B_2$ 所在格，划掉 B_2 所在列。同时 A_1 的产量 50 中已经运输了 40，余下 10，见表 4-6。

表 4-6 寻求初始基可行解的运输表 1

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	余量
A_1	3	2（40）	7	6	50	10
A_2	7	5	2	3	60	60
A_3	4	5	4	5	25	25
销量	60	40	20	15		
余量	60	0	20	15		

（2）在余下的表格中再次寻求最小元素，仍然为 2，为 $A_2 \to B_3$ 。产量余量为 60，销量余量为 20，选择最小值 20，填写在 $A_2 \to B_3$ 所在格，划去 B_3 列。修正产量余量为 40，见表 4-7。

表 4-7　寻求初始基可行解的运输表 2

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	余量
A_1	3	2(40)	7	6	50	10
A_2	7	5	2(20)	3	60	40
A_3	4	5	4	5	25	25
销量	60	40	20	15		
余量	60	0	0	15		

（3）余下的最小元素为 3，任意选择一个 3，如 $A_1 \to B_1$ 。产量余量为 10，销量余量为 60，取最小值 10，并填写在所在格 $A_1 \to B_1$ ，划去 A_1 行。修正销量余量为 50，见表 4-8。

表 4-8　寻求初始基可行解的运输表 3

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	余量
A_1	3(10)	2(40)	7	6	50	0
A_2	7	5	2(20)	3	60	40
A_3	4	5	4	5	25	25
销量	60	40	20	15		
余量	50	0	0	15		

（4）余下的最小元素为 3，为 $A_2 \to B_4$ 。产量余量为 40，销量余量为 15，取最小值 15，并填写在所在格 $A_2 \to B_4$ ，划去 B_4 列。修正产量余量为 25，见表 4-9。

表 4-9　寻求初始基可行解的运输表 4

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	余量
A_1	3(10)	2(40)	7	6	50	0
A_2	7	5	2(20)	3(15)	60	25
A_3	4	5	4	5	25	25
销量	60	40	20	15		
余量	50	0	0	0		

（5）余下最小元素为 4，为 $A_3 \to B_1$ 。产量余量为 25，销量余量为 50，取最小值 25，并填写在所在格 $A_3 \to B_1$ ，划去 A_3 行。修正销量余量为 25，见表 4-10。由于余下只有一个元素 7，即 $A_2 \to B_1$ ，产量和销量相等，因此在该位置填写 25，正好平衡。初始基可行解见表 4-10。

表 4-10　初始基可行解

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3(10)	2(40)	7	6	50
A_2	7(25)	5	2(20)	3(15)	60
A_3	4(25)	5	4	5	25
销量	60	40	20	15	

带括号的变量为基变量，数量应为 $3+4-1=6$ 个，而表 4-10 中正好有 6 个基变量。

如果采用伏格尔法求出初始基可行解，则步骤如下：

（1）首先该运输问题为产销平衡的运输问题，否则需要增加假想的产地或者销地。

（2）计算每行每列最小和次小元素的差额。最大差额为3，为 B_2 列，所在列的最小元素为2，即 $A_1 \to B_2$ 。产量余量为50，销量余量为40，选择最小值40，填写在 $A_1 \to B_2$ 所在格，划去 B_2 列。修正产量余量为10，见表4-11。

表4-11　第一次差额计算及求解

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	余量	差额
A_1	3	~~2（40）~~	7	6	50	10	1
A_2	7	~~5~~	2	3	60	60	1
A_3	4	~~5~~	4	5	25	25	0
销量	60	~~40~~	20	15			
余量	60	~~0~~	20	15			
差额	1	3	2	2			

（3）重新计算最大差额。最大差额为3，为 A_1 行，所在行的最小元素为3，即 $A_1 \to B_1$ 。产量余量为10，销量余量为60，选择最小值10，填写在 $A_1 \to B_1$ 所在格，划去 A_1 行。修正销量余量为50，见表4-12。

表4-12　第二次差额计算及求解

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	余量	差额
A_1	~~3（10）~~	~~2（40）~~	~~7~~	~~6~~	~~50~~	~~0~~	3
A_2	7	~~5~~	2	3	60	60	1
A_3	4	~~5~~	4	5	25	25	0
销量	60	~~40~~	20	15			
余量	50	~~0~~	20	15			
差额	1		2	2			

（4）再计算最大差额。最大差额为3，为 B_1 列，所在行的最小元素为4，即 $A_3 \to B_1$ 。产量余量为25，销量余量为50，选择最小值25，填写在 $A_3 \to B_1$ 所在格，划去 A_3 行。修正销量余量为25，见表4-13。

表4-13　第三次差额计算及求解

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	余量	差额
A_1	~~3（10）~~	~~2（40）~~	~~7~~	~~6~~	~~50~~	~~0~~	
A_2	7	~~5~~	2	3	60	60	1
A_3	~~4（25）~~	~~5~~	~~4~~	~~5~~	~~25~~	~~0~~	0
销量	60	~~40~~	20	15			
余量	25	~~0~~	20	15			
差额	3		2	2			

（5）再计算最大差额。最大差额为2，为 B_3 列，所在行的最小元素为2，即 $A_2 \to B_3$ 。产量余量为60，销量余量为20，选择最小值20，填写在 $A_2 \to B_3$ 所在格，划去 B_3 列。修正产量余量为35。由于仅仅余下一行，此时其他产量余量和销量余量只能填写在 $A_2 \to B_1$ 和 $A_2 \to B_4$ 中，见表4-14。

表 4-14　第四次差额计算及求解

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	余量	差额
A_1	3(10)	2(40)	7	6	50	0	
A_2	7(25)	5	2(20)	3(15)	60	0	1
A_3	4(25)	5	4	5	25	0	0
销量	60	40	20	15			
余量	25	0	20	15			
差额							

(6)运用伏格尔法得到的初始基可行解见表 4-15。

表 4-15　运用伏格尔法得到的初始基可行解

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3(10)	2(40)	7	6	50
A_2	7(25)	5	2(20)	3(15)	60
A_3	4(25)	5	4	5	25
销量	60	40	20	15	

此时，带有括号的格即为基变量格，正好为 $3+4-1=6$ 个。

本例中，在寻求初始基可行解的过程中，均是每次划去一行或者一列，这样能够保证初始基可行解的个数正好为 $n+m-1$。但是如果同时划去一行或者一列，则基变量的个数会小于 $n+m-1$。此时，需要在同时划去一行或者一列的其他元素格上补上 0。要说明的是，尽管运输量为 0，但是该变量为基变量，可以为后续的检验数和最优解求解提供基础。

【例 4-3】已知某运输问题的供需关系和相应的运费见表 4-16。试找出其初始基可行解。

表 4-16　运价和产销量表

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	产量
A_1	4	8	7	72
A_2	16	24	20	82
A_3	6	5	10	61
销量	72	102	41	

【解】该问题是产销平衡的运输问题，故不用增加假想的产地和销地。

(1)首先找出最小元素为 4，为 $A_1 \to B_1$。产量为72，销量也是72，同时划去 A_1 行和 B_1 列，见表 4-17。

表 4-17　寻求初始基可行解的运输表 1

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	产量	余量
A_1	4(72)	8	7	72	0
A_2	16	24	20	82	82
A_3	6	5	10	61	61
销量	72	102	41		
余量	0	102	41		

（2）在余下的元素中寻找最小元素为 5，为 $A_3 \to B_2$ 。产量余量为 61，销量余量为 102，于是划去 A_3 行，修正销量余量为 41，见表 4-18。

表 4-18　寻求初始基可行解的运输表 2

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	产量	余量
A_1	4（72）	8	7	72	0
A_2	16	24	20	82	82
A_3	6	5（61）	10	0	
销量	72	102	41		
余量	0	41	41		

（3）余下最小的运费 20，为 $A_2 \to B_3$ 。产量余量为 82，销量余量为 41，取最小值 41，划去 B_3 列。修正产量余量为 41，见表 4-19。由于仅仅余下一个元素，产量和销量相等，正好填写产量或销量。

表 4-19　寻求初始基可行解的运输表 3

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	产量	余量
A_1	4（72）	8	7	72	0
A_2	16	24（41）	20（41）	82	0
A_3	6	5（61）	10	0	
销量	72	102	41		
余量	0	0	0		

此时，由于基可行解的个数为 4 个，而要求的基变量个数应为 $3+3-1=5$ 个，缺少 1 个，会影响检验数的判断和最优解的求解。由于缺少的元素是在同时划去一行和一列引起的，原则上在同时划去的行和列的其他任何元素处补充 0 即可，尽量在运费最小的单元格补充，见表 4-20。

表 4-20　初始基可行解

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	产量
A_1	4（72）	8	7	72
A_2	16	24（41）	20（41）	82
A_3	6（0）	5（61）	10	0
销量	72	102	41	

4.2.2　最优解的判别

初始基可行解是否为最优解，仍然需要检验其非基变量检验数。由于运输问题的目标函数均是运费最少，因此要求所有的非基变量检验数全部大于或等于零。下面介绍两种求空格检验数的方法。

1. 闭合回路法

闭合回路法的主要思想是以非基变量单元格作为起始点，用水平和垂直线向前划，当碰到数字格时，可以转 90°后继续前进，直到回到起始空格为止。除了起始点是空格以外，闭回路的其他各个顶点必须是数字格。

以该非基变量单元格为第1个，逐步为其他的基变量单元格标号，为2、3、4等。该非基变量单元格的检验数为奇数格的运费之和减去偶数格的运费之和。

从每一空格出发一定存在并可以找到唯一的闭回路，因为 $m+n-1$ 个数字格（基变量）对应的系数向量是一个基，任一空格（非基变量）对应的系数向量是基的线性组合。

【例4-4】计算【例4-2】的非基变量检验数。

【解】【例4-2】的初始基可行解见表4-21。其中，x_{11}、x_{12}、x_{21}、x_{23}、x_{24}、x_{31} 为基变量，余下的变量均为非基变量。按照单纯形法的求解思路，需要计算每个非基变量检验数。

例如，求解非基变量 x_{13} 的检验数的闭合回路表示为表4-21。

表4-21　初始基可行解

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3(10)	2(40)	7	6	50
A_2	7(25)	5	2(20)	3(15)	60
A_3	4(25)	5	4	5	25
销量	60	40	20	15	

第1格为 A_1B_3，于是，该闭合回路的奇数格运费之和为7+7=14，偶数格的运费之和为2+3=5，两者相减为9，即非基变量的检验数为9。同理可求出其他非基变量的检验数。

显然，如果非基变量较多，对每个非基变量均要画出一个闭合回路，很复杂。所以，需要寻求其他的非基变量检验数求解方法。

2. 位势法

设 u_1、u_2、…、u_m，v_1、v_2、…、v_n 是对应运输问题的 $m+n$ 个约束条件的对偶变量。如果将运输问题的以下系数矩阵转换成单纯形表，可以基于表格计算检验数。

$$
\begin{array}{c}
\\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & \cdots & x_{m2} \cdots x_{mn} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & & & \ddots & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

依据该系数矩阵，可以得到变量 x_{ij} 的检验数 σ_{ij} 为 $c_{ij}-u_i-v_j$。由单纯形法可知，所有基变量的检验数等于0，即 $c_{ij}-(u_i+v_j)=0$。所以只要求出所有的 u_i 和 v_j，即可求出所有的非基变量检验数。

由于 m 个产地和 n 个销地的运输问题中，基变量的个数为 $m+n-1$。然而，要依据等式 $c_{ij}-(u_i+v_j)=0$ 计算出所有的 u_i 和 v_j，需要 $m+n$ 个方程。为了求出所有的 u_i 和 v_j，可以假设其中任意一个 u_i 或 v_j 为零。

【例4-5】计算【例4-2】的非基变量检验数。

【解】【例4-2】的初始基可行解见表4-22。

表 4-22　初始基可行解

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	3(10)	2(40)	7	6	0
A_2	7(25)	5	2(20)	3(15)	4
A_3	4(25)	5	4	5	1
v_j	3	2	-2	-1	

如果令 $u_1 = 0$，由于基变量检验数为 0，带括号的单元格即为基变量单元格，如 A_1B_1。由于 $c_{11} - u_1 - v_1 = 0$，即 $3 - 0 - v_1 = 0$，因此 $v_1 = 3$。依此类推，可以求出其他的 u_i 和 v_j。每个非基变量的检验数即为 $c_{ij} - u_i - v_j$。表 4-23 中，检验数均用带括号的数表示。

表 4-23　非基变量检验数求解表

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	3(10)	2(40)	7(9)	6(7)	0
A_2	7(25)	5(-1)	2(20)	3(15)	4
A_3	4(25)	5(2)	4(5)	5(5)	1
v_j	3	2	-2	-1	

由于 x_{22} 的检验数为 -1，说明初始基可行解并不是最优解。

4.2.3　迭代

当运输问题的非基变量检验数为负数时，说明仍然没有达到最优解，需要进基和出基处理，即迭代。运输问题的迭代主要采用闭合回路法，描述如下：

(1) 找出非基变量检验数为负数的单元格，取负数最小的单元格，以其作为起点，以其他的基变量为中间点，画出一条闭合回路（与求检验数的闭合回路法画法相同）。

(2) 以该起点作为闭合回路的第 1 格，逐步为其他的基变量单元格标号，为 2、3、4 等。

(3) 找出偶数格的最小值，然后闭合回路的每个基数格的运量全部加上这个最小值，闭合回路的每个偶数格的运量全部减去这个最小值。其中，起点的运量为 0，最小值所在的偶数格运量变为 0，称为出基变量，而起点的单元格称为基变量。于是，完成了一次迭代。

(4) 再次采用闭合回路法或位势法计算非基变量检验数，如果所有的非基变量检验数大于或者等于零，说明找到最优解，停止迭代；否则，仍然需要采用闭合回路法进行迭代，直到寻求到最优解为止。

要说明的是，如果存在某个非基变量检验数为 0，则说明该运输问题可能存在多个解。

【例 4-6】计算【例 4-2】的最优解。

【解】基于表 4-23 提供的非基变量检验数，仅 x_{22} 的检验数为 -1，于是，以该单元格为起始单元格，画出一条闭合回路，见表 4-24。

表 4-24　第一次迭代表

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3(10)	2(40)	7	6
A_2	7(25)	5	2(20)	3(15)
A_3	4(25)	5	4	5

偶数格的运量的最小值为25，故所有的奇数格加上25，所有的偶数格减去25，完成一次迭代，见表4-25。此时 x_{22} 成为基变量，成为 x_{21} 非基变量。

表4-25　非基变量检验数表

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	3(35)	2(15)	7(8)	6(6)	0
A_2	7(1)	5(25)	2(20)	3(15)	3
A_3	4(25)	5(2)	4(4)	5(4)	1
v_j	3	2	-1	0	

此时，所有的非基变量检验数全部大于零，满足条件。故最优解见表4-26。

表4-26　最 优 解 表

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3(35)	2(15)	7	6
A_2	7	5(25)	2(20)	3(15)
A_3	4(25)	5	4	5

4.3　运输问题应用及软件求解

随着物流业的快速发展，运输问题及其建模和求解方法在现实中得到广泛应用。如何有效建模也是运输问题应用的关键步骤之一。同时，随着产地和销地的增加，运输问题的计算量大大增加，如何采用软件求解运输问题的模型也变得尤为重要。

4.3.1　运输问题的应用

运输问题也是一种线性规划问题，不仅可以采用运输问题的建模和求解方法解决运输问题，还可以解决某些特殊的线性规划问题。

【例4-7】(运输问题)A、B 和 C 三个城市每年分别需要煤炭400 万吨、350 万吨和500 万吨，由 D、E 和 F 三家企业提供，这三家企业的年供应量分别为500 吨、300 吨和420 吨。由于需求大于供给，通过调度方案设计，A 城市可减少供应量 0 ~ 50 万吨，B 城市的需求必须满足，C 城市的供给不能少于 450 万吨。试求将供应量有效分配且总运费为最低的调运方案。各个企业距离各个城市的单位运价(万元/万吨)见表4-27。

表4-27　运　价　表

产地＼销地	A	B	C
D	10	8	15
E	12	16	7
F	15	20	9

【解】依据题意，A 地必须满足 350 万吨，C 地为 450 万吨，于是将现有的 A 和 C 进行拆分，同时，由于产销不平衡，销量大于产量，因此需要增加假想的产地，表示为表4-28。

表 4-28　运输调度表

销地 产地	A	H	B	C	I	供给
D	10	10	8	15	15	500
E	12	12	16	7	7	300
F	15	15	20	9	9	420
G	0	0	0	0	0	30
需求	M	50	M	M	50	

采用运输问题的表上作业法即可求解，其中 M 为正无穷大。

【例 4-8】（生产管理）某厂按照合同规定每个季末分别提供 20 台、25 台、30 台、30 台同一规格的设备。如果生产出来当季不交货，则每储存和维护一个产品一个季度需要 3000 元。求在完成合同的情况下，使得全年的所有费用最小的决策。该厂各个季度的生产能力和每台设备的成本见表 4-29。

表 4-29　生产能力和每台设备的成本表

季度	生产能力	单位成本/万元
Ⅰ	25	11
Ⅱ	34	11.5
Ⅲ	40	10.8
Ⅳ	20	11.2

【解】基于上述生产成本和储存维护费用等数据，且后续月份的生产产品只能满足后续月份的需要，后续月份如供应前续月份的费用设定为无穷大（M），其相关数据见表 4-30。

表 4-30　运　费　表

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
Ⅰ	11	11.3	11.6	11.9
Ⅱ	M	11.5	11.8	12.1
Ⅲ	M	M	10.8	11.1
Ⅳ	M	M	M	11.2

由于需求量和为 105，而产量之和为 119，因此需要增加假想的销地，因此其单纯形表可以表示为表 4-31。

表 4-31　运　输　表

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	供给
Ⅰ	11	11.3	11.6	11.9	0	25
Ⅱ	M	11.5	11.8	12.1	0	34
Ⅲ	M	M	10.8	11.1	0	40
Ⅳ	M	M	M	11.2	0	20
需求	20	25	30	30	14	

采用运输问题的表上作业法即可求解。

【例 4-9】（生产管理）为了确保飞机的飞行安全，飞机上的发动机每半年进行强迫更换大

修。某维修厂估计某种型号的战斗机从下一半年起的今后三年半发送机的更换需要量分别为100 台，70 台，80 台，120 台，150 台，140 台。更换发动机时可以更换新的，也可以使用经过大修的旧发动机。已知每台发动机的购置费为 10 万元，旧发动机的维修包括快修（每台 2 万元，半年交货，即本期送修的修完下期可以用）、慢修（每台 1 万元，一年交货）。已知种型号的战斗机三年后即将退役，退役后就要报废。

在今后三年的每半年内，该厂为了满足维修需要各种新购、快修和慢修的发动机数量各为多少台，可使得总的维修费用最省？

【解】假定 x_j 表示每期（每半年）的新购数，y_{ij} 表示第 i 期更换下来送去修理用于第 j 期的发动机数目，c_{ij} 为相应的修理费。由于快修费用是慢修费用的两倍，$j > i + 1$ 时，应该慢修。

每期的供应量为新购和大修的总和，每期更换下来的发动机也相当于其供应量。因此其运输表格可以表示为表 4-32。由于供应量大于需求量，因此需要在运输表中增加假想的销地，才能够实现产销平衡。

表 4-32　运　输　表

	1	2	3	4	5	6	7	供给
新购	10	10	10	10	10	10	0	660
第一期送修	M	2	1	1	1	1	0	100
第二期送修	M	M	2	1	1	1	0	70
第三期送修	M	M	M	2	1	1	0	80
第四期送修	M	M	M	M	2	1	0	120
第五期送修	M	M	M	M	M	2	0	150
需求	100	70	80	120	150	140	520	

采用运输问题的表上作业法即可求解。

4.3.2　运输问题的软件求解

由于运输问题本身是线性规划问题，可以采用 LINGO 软件和 Excel 软件求解。下面以【例 4-2】为例，介绍软件求解。

如果采用 LINGO 软件解该问题，则仍然按照线性规划模型的程序设计思路进行。其线性规划模型为

$$\min z = 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 5x_6 + 2x_7 + 3x_8 + 4x_9 + 5x_{10} + 4x_{11} + 5x_{12}$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50 \\ x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 60 \\ x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 25 \\ x_1 + x_5 + x_9 = 60 \\ x_2 + x_6 + x_{10} = 40 \\ x_3 + x_7 + x_{11} = 20 \\ x_4 + x_8 + x_{12} = 15 \\ x_i \geqslant 0(i = 1, \cdots, 12) \end{cases}$$

运行 LINGO 软件，并在空白处输入以下程序(如图 4-2 所示)：

```
min =3* x1 +2* x2 +7* x3 +6* x4 +7* x5 +5* x6 +2* x7 +3* x8 +4* x9 +5* x10 +4* x11 +5* x12;
x1 +x2 +x3 +x4 =50;
x5 +x6 +x7 +x8 =60;
x9 +x10 +x11 +x12 =25;
x1 +x5 +x9 =60;
x2 +x6 +x10 =40;
x3 +x7 +x11 =20;
x4 +x8 +x12 =15;
x1 > =0;
x2 > =0;
x3 > =0;
x4 > =0;
x5 > =0;
x6 > =0;
x7 > =0;
x8 > =0;
x9 > =0;
x10 > =0;
x11 > =0;
x12 > =0;
```

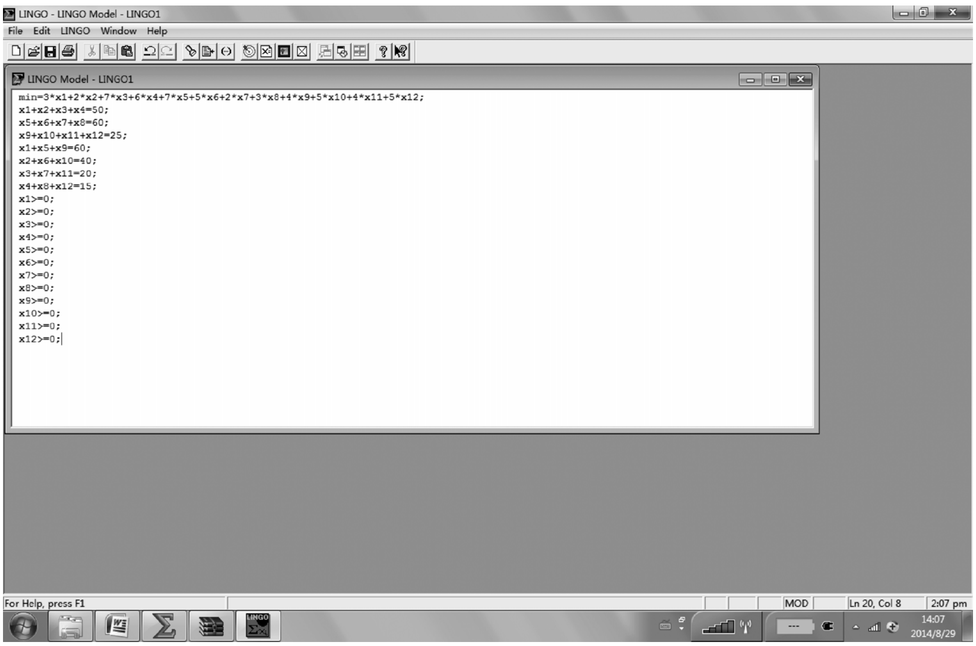


图 4-2

单击上方工具栏中“LINGO”菜单的“Solve”命令项，如图 4-3 所示。

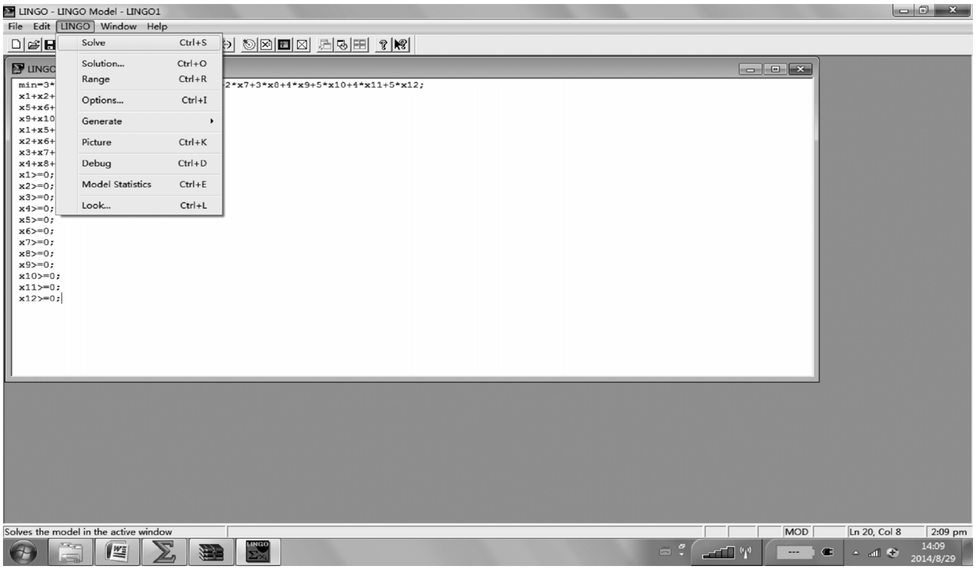


图 4-3

于是，便输出其最优解和灵敏度分析结果，如图 4-4 所示。

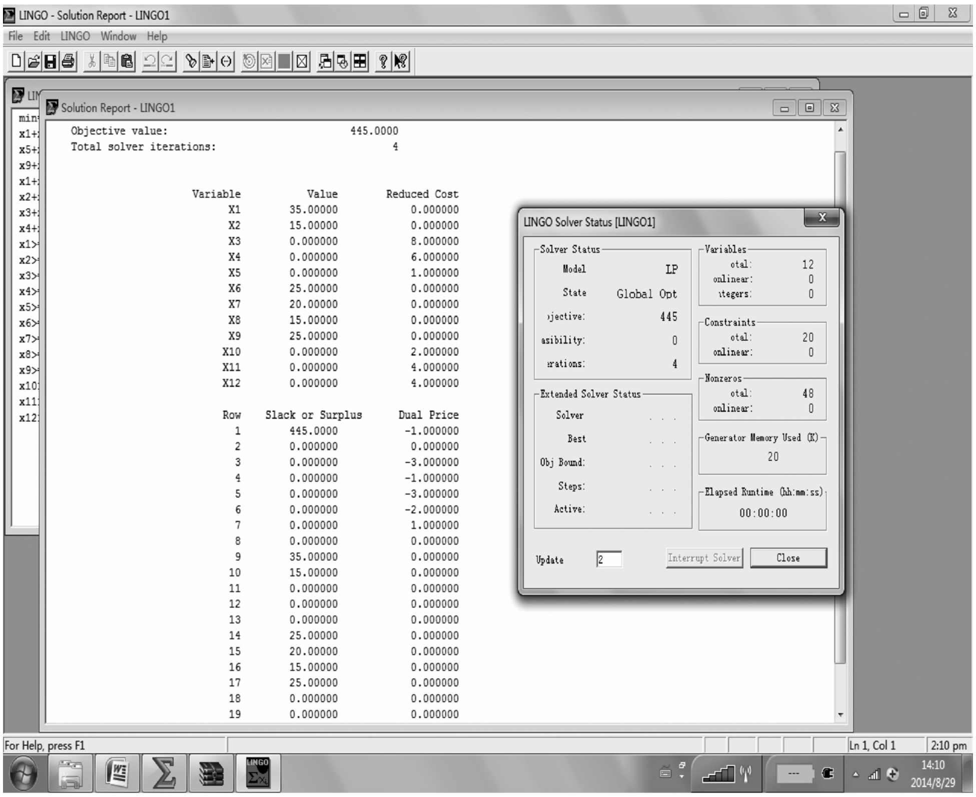


图 4-4

下面介绍采用 Excel 软件计算。

首先运行 Excel 软件，单击“工具”菜单中的“加载宏”命令项，选中“规划求解”命令项，单击“确定”按钮，此时在“工具”菜单中就出现“规划求解”命令项。

在 Excel 软件界面的任意单元格中，输入线性规划模型的常量，如图 4-5 所示。

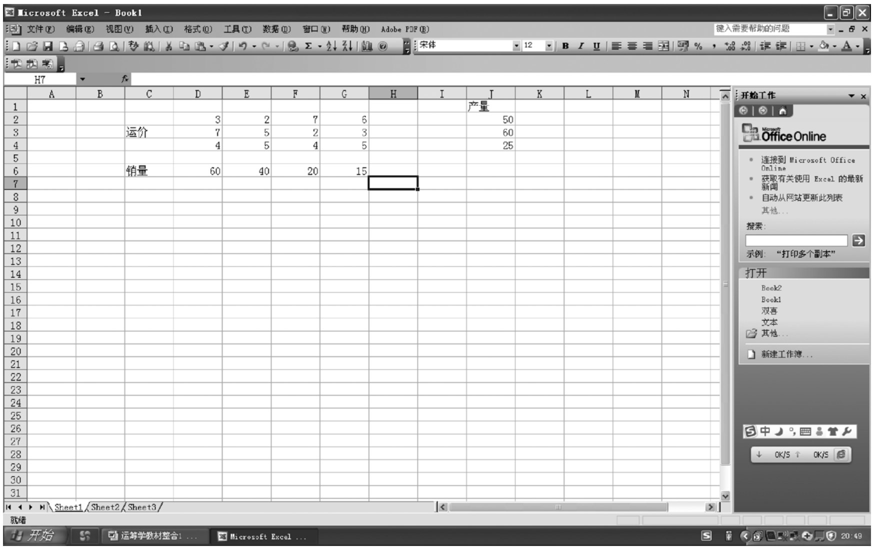


图 4-5

接着，确定可变单元格，如图 4-6 所示。

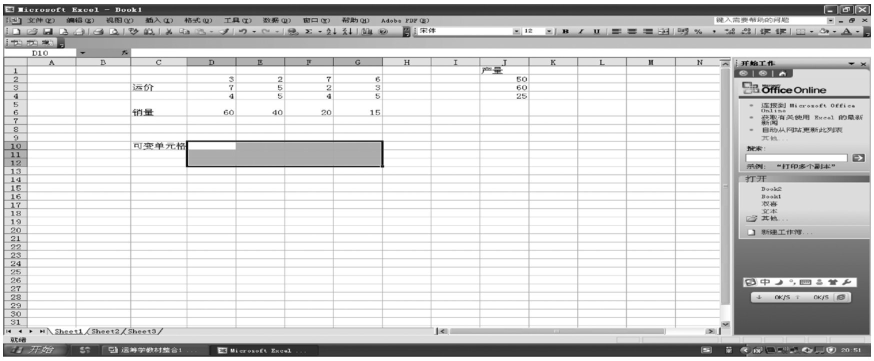


图 4-6

计算行的和，可以使用 sum 函数实现，如图 4-7 所示。

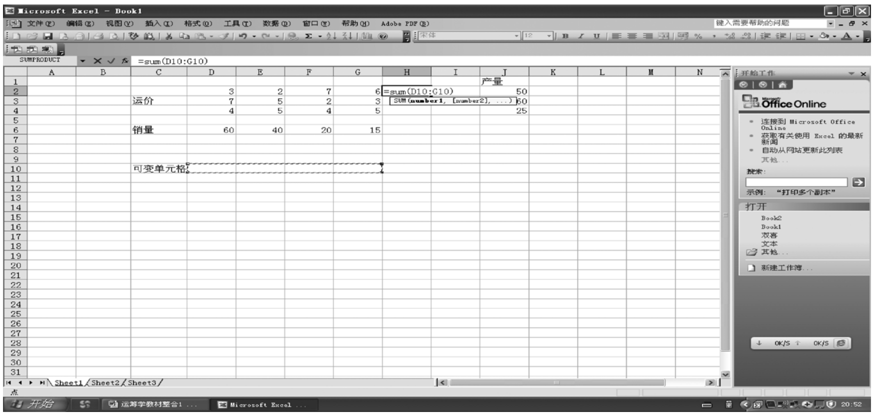


图 4-7

列的和计算结果如图 4-8 所示。

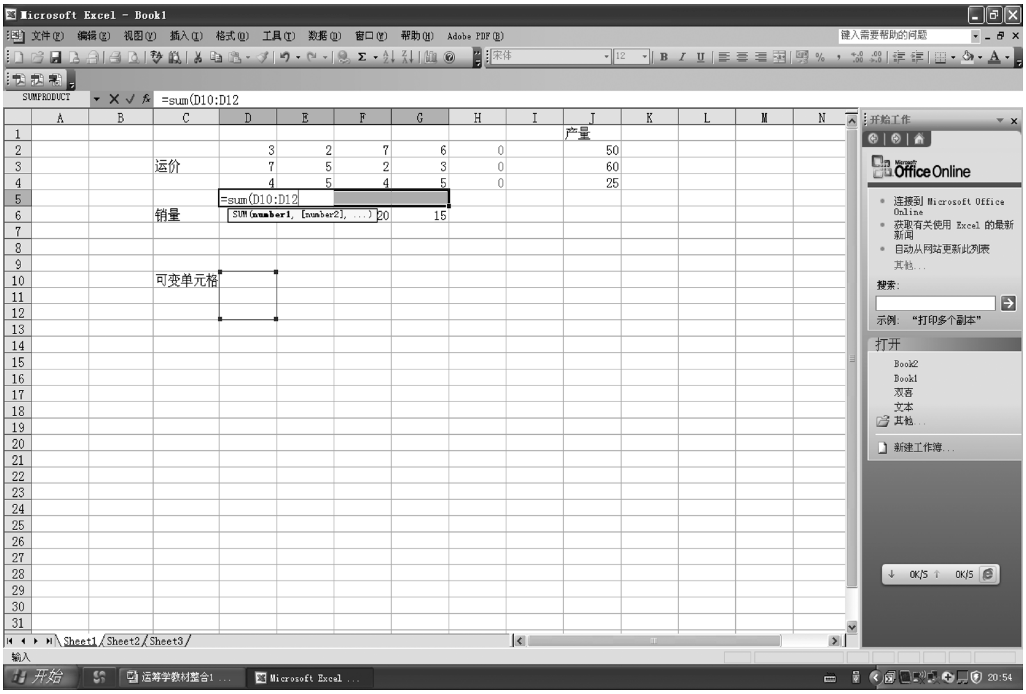


图 4-8

再计算所有行的和所有列的和，和的结果用红色标注，如图 4-9 所示。

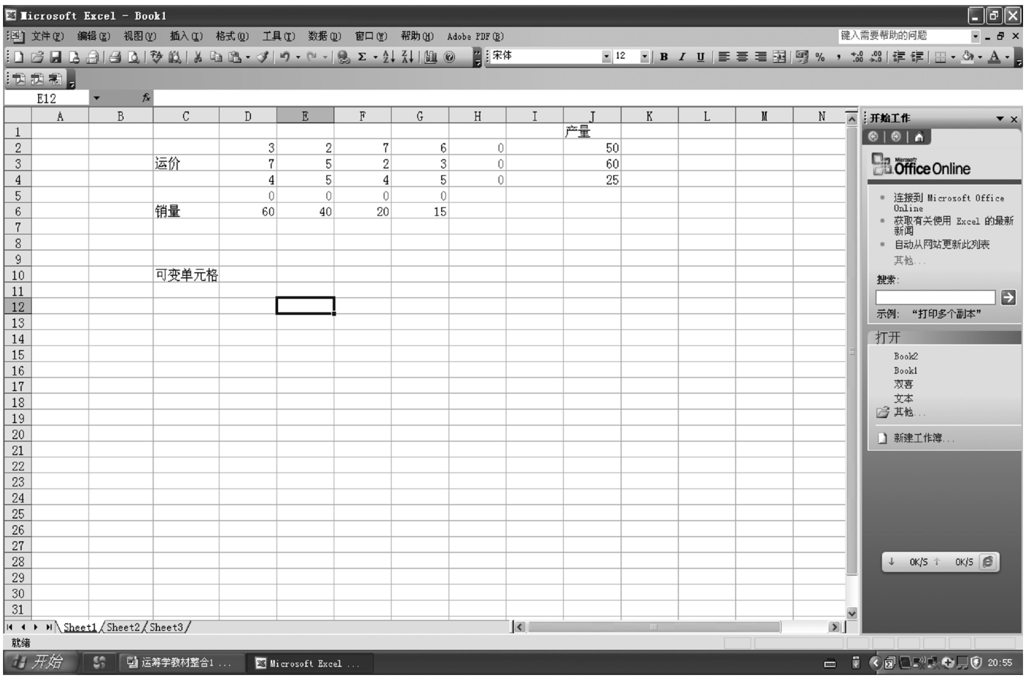


图 4-9

计算目标函数，如图 4-10 所示。

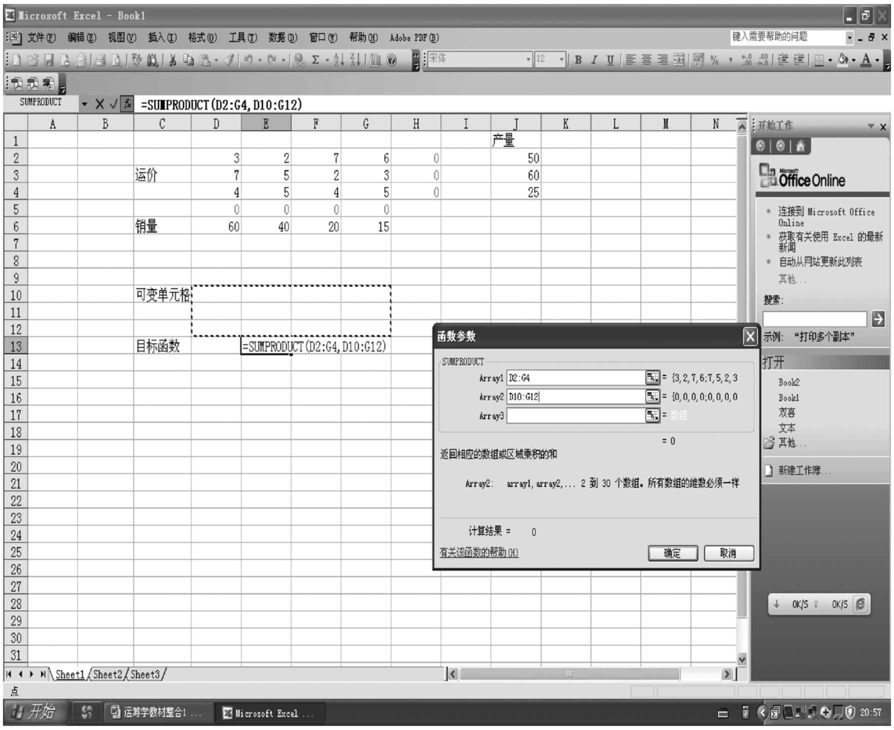


图 4-10

打开“规划求解参数”对话框，如图 4-11 所示，按照要求输入相应的变量或者约束条件。7 个等式约束条件必须输入，且目标函数取最小值。

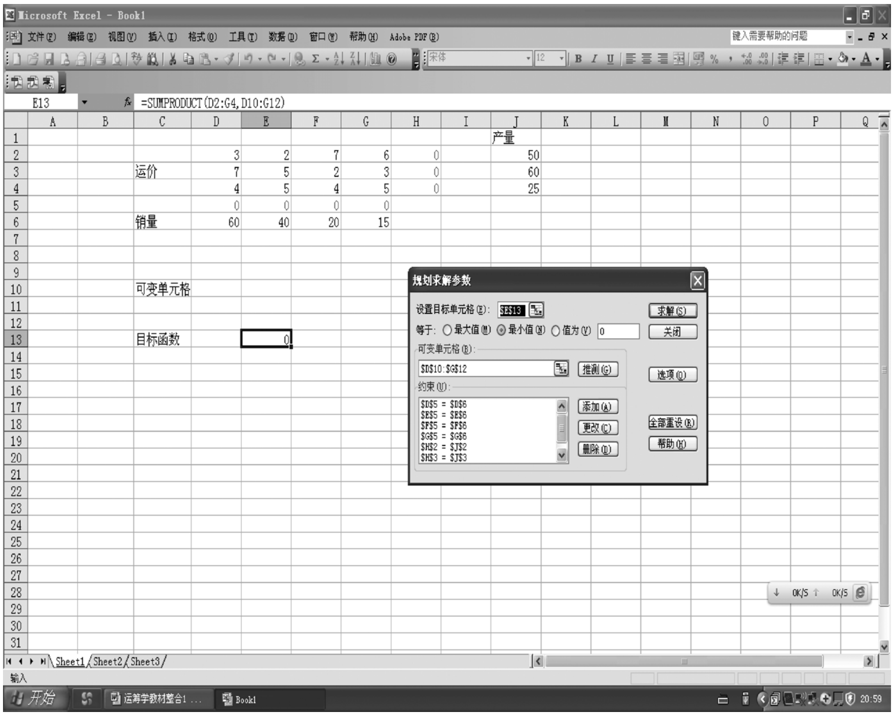


图 4-11

单击“选项”按钮，选中“采用线性模型”和“假定非负”，单击“确定”按钮，单击“求解”按钮，出现如图 4-12 所示结果。

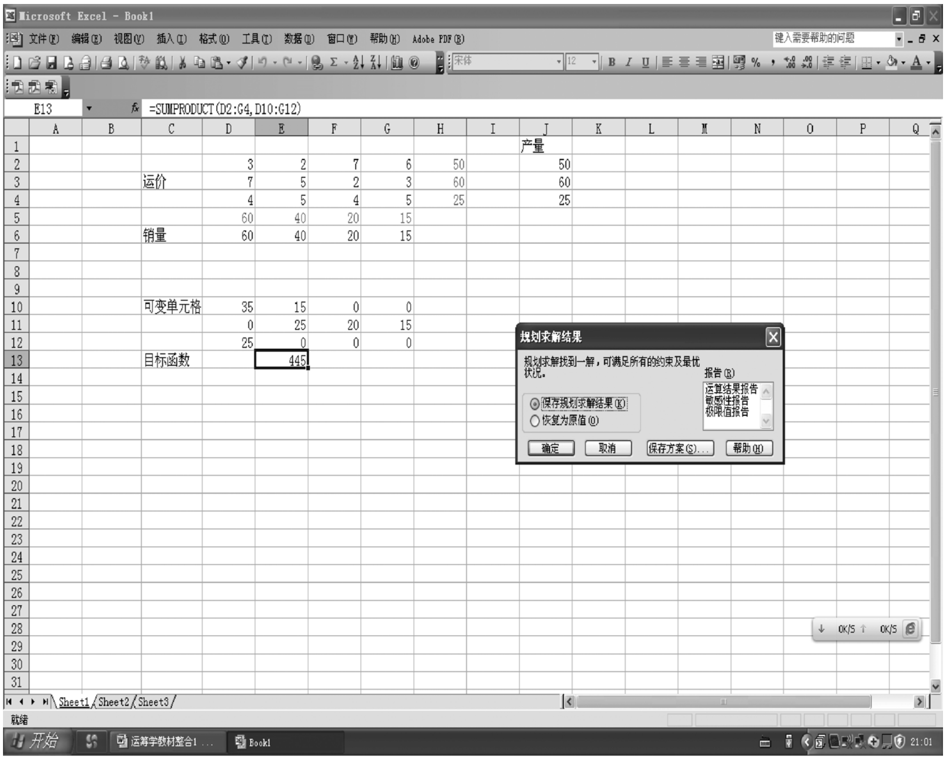
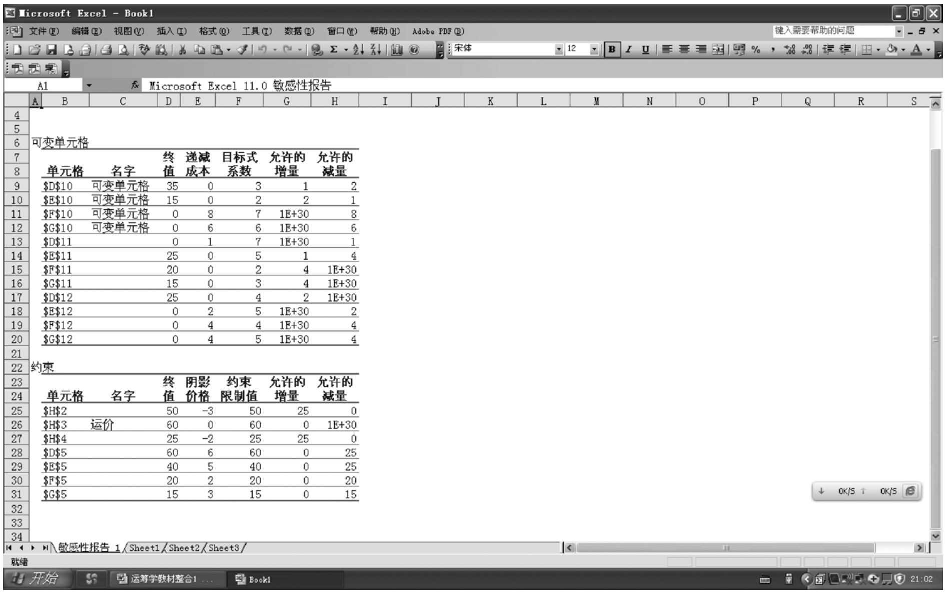


图 4-12

若要对价值系数和资源进行灵敏度分析，则选择右侧的“敏感性分析报告”，单击“确定”按钮，结果如图 4-13 所示。


Microsoft Excel 11.0 敏感性报告

可变单元格

单元格	名字	终值	递减成本	目标式系数	允许的增量	允许的减量
D10	可变单元格	35	0	3	1	2
E10	可变单元格	15	0	2	2	1
F10	可变单元格	0	8	7	1E+30	8
G10	可变单元格	0	6	6	1E+30	6
D11		0	1	7	1E+30	1
E11		25	0	5	1	4
F11		20	0	2	4	1E+30
G11		15	0	3	4	1E+30
D12		25	0	4	2	1E+30
E12		0	2	5	1E+30	2
F12		0	4	4	1E+30	4
G12		0	4	5	1E+30	4

约束

单元格	名字	终值	阴影价格	约束限制值	允许的增量	允许的减量
H2		50	-3	50	25	0
H3	运价	60	0	60	0	1E+30
H4		25	-2	25	25	0
D5		60	6	60	0	25
E5		40	5	40	0	25
F5		20	2	20	0	20
G5		15	3	15	0	15

图 4-13

本章要点

在经济建设和管理决策活动中，运输问题是切实存在且经常会遇到的一类问题。了解这类问题并掌握其求解方法有着很明显的现实意义。了解运输问题的数学模型并掌握模型的数字特征，将有助于对这类问题的识别和求解。

表上作业法是求解运输问题的最简便易行的方法。表上作业法是指用列表的方法求解线性规划问题中运输问题的计算方法。由于产销平衡的运输问题必存在最优解，故通常用最小元素法或伏格尔（Vogel）法求解问题的初始基可行解；再运用闭回路法或位势法判别基解是否为最优解；随后运用闭回路调整法对初始基可行解进行改进以求得最优解。同时应当注意到，表上作业法在计算过程中可能存在无穷多最优解和退化的情况。

在实际问题中，产销量往往是不平衡的，为了计算简便，需要把不平衡的运输问题化成平衡的运输问题，再利用表上作业法求解。增加的假想产地和销地到其他各地的运价均为零。

关键公式

- 产销平衡问题的数学模型

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s. t:}\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j (j = 1, \cdots, n)\\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i (i = 1, \cdots, m)\\ x_{ij} \geqslant 0\end{cases}$$

- 表上作业法计算空格（非基变量）的检验数

$$c_{ij} - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_{ij} \quad (i, j \in N)$$

案例解析

现在来求解本章一开始提到的 P&T 公司的配送问题。

（1）本题属于产销平衡问题，不需要增加假想的产地或销地。

（2）采用伏格尔法计算初始基可行解。其中差额最大的是 294，最小元素为 388，为艾尔贝 · 李到赖皮特城，产量为 100，销量为 70，取最小值，将产量余量修正为 30，划去赖皮特城所在的列，并在 388 后填写运量，见表 4-33。

表 4-33　第一次差额计算及求解

从 \ 至	萨克拉门托	盐湖城	赖皮特城	奥尔巴古	产量	产量余量	差额
贝林翰	464	513	654	867	75	75	49
尤基尼	352	416	690	791	125	125	64
艾尔贝 · 李	995	682	388（70）	685	100	30	294
销量	80	65	70	85			
销量余量	80	65		85			
v_j	112	97		106			

再次计算最小元素和次小元素之间的差额。其中差额最大的是112，最小元素为352，为尤基尼到萨克拉门托，产量为125，销量为80，取最小值，将产量余量修正为45，划去萨克拉门托所在列，并在352后填写运量，见表4-34。

表4-34 第二次差额计算及求解

从 \ 至	萨克拉门托	盐湖城	赖皮特城	奥尔巴古	产量	产量余量	差额
贝林翰	464	513	654	867	75	75	354
尤基尼	352(80)	416	690	791	125	45	375
艾尔贝·李	995	682	388(70)	685	100	30	3
销量	80	65	70	85			
销量余量		65		85			
差额		97		106			

再次计算最小元素和次小元素之间的差额。其中差额最大的是375，最小元素为416，为尤基尼到盐湖城，产量为45，销量为65，取最小值，将销量余量修正为20，划去尤基尼所在行，并在416后填写运量，见表4-35。

表4-35 第三次差额计算及求解

从 \ 至	萨克拉门托	盐湖城	赖皮特城	奥尔巴古	产量	产量余量	差额
贝林翰	464	513	654	867	75	75	354
尤基尼	352(80)	416(45)	690	791	125		
艾尔贝·李	995	682	388(70)	685	100	30	3
销量	80	65	70	85			
销量余量		20		85			
差额		97		106			

再次计算最小元素和次小元素之间的差额。其中差额最大的是354，最小元素为513，为贝林翰到盐湖城，产量为75，销量为20，取最小值，将产量余量修正为55，划去盐湖城所在列，并在513后填写运量，见表4-36。

表4-36 第四次差额计算及求解

从 \ 至	萨克拉门托	盐湖城	赖皮特城	奥尔巴古	产量	产量余量	差额
贝林翰	464	513(20)	654	867	75	55	354
尤基尼	352(80)	416(45)	690	791	125		
艾尔贝·李	995	682	388(70)	685	100	30	3
销量	80	65	70	85			
销量余量				85			
差额		169		182			

余下仅两个元素，直接按照产销量补全数据即可。由于基变量的个数正好等于 $3+4-1=6$ 个，则其初始基可行解见表4-37。

表 4-37　初始基可行解

从＼至	萨克拉门托	盐湖城	赖皮特城	奥尔巴古	产量
贝林翰	464	513(20)	654	867(55)	75
尤基尼	352(80)	416(45)	690	791	125
艾尔贝·李	995	682	388(70)	685(30)	100
销量	80	65	70	85	

(2)采用位势法判断上述解是否为最优解。初始基可行解见表 4-38。

表 4-38　初始基可行解

从＼至	萨克拉门托	盐湖城	赖皮特城	奥尔巴古	u_i
贝林翰	464(15)	513(20)	654(84)	867(55)	0
尤基尼	352(80)	416(45)	690(217)	791(21)	-97
艾尔贝·李	995(728)	682(351)	388(70)	685(30)	-182
v_j	449	513	570	867	

非基变量检验数为该非基变量对应运费后代括号且加粗的数据。所有的非基变量检验数均为非负，故初始基可行解即为最优解。

这时，公司的最小运费为

$$513\times20+867\times55+352\times80+416\times45+388\times70+685\times30=152535$$

练习题

1. 某运输及单位运价表见表 4-39，用表上作业法求该运输问题的最优解。c_{11} 或 c_{23} 在什么范围内变化时，上述最优解不变?

表 4-39　单位运价表

	B_1	B_2	B_3	产量
A_1	4	2	5	8
A_2	3	5	3	7
A_3	1	3	2	4
销量	4	8	5	

2. 有 A_1、A_2、A_3 三座铁矿，每天要把生产的铁矿石运往 B_1、B_2、B_3、B_4 四个炼铁厂。各矿的产量、各厂的销量(百吨/天)以及各厂矿间的运价(百元/百吨)见表 4-40。

表 4-40　单位运价表

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	6	3	2	5	5
A_2	7	5	8	4	2
A_3	3	2	9	7	3
销量	2	3	1	4	

(1)试用伏格尔法和最小元素法给出该运输问题的初始调运方案，并求出该初始调运方案对应的总运费。

（2）用位势法判断（1）中用伏格尔法所求出的初始调运方案是否最优方案，如果不是，求出该问题的最优解。

3. 某公司经销一种产品。它下设三个生产点，每日的产量分别为 $A_1=5$ 吨，$A_2=7$ 吨，$A_3=8$ 吨。该公司把这些产品分别运往四个销售点，各销售点的每日销量分别为 $B_1=3$ 吨，$B_2=4$ 吨，$B_3=5$ 吨，$B_4=8$ 吨。每吨产品从各生产点到各销售点的运价见表 4-41。

表 4-41　单位运价表

运价（元/吨）销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	11	3	10	5
A_2	1	9	2	8	7
A_3	7	4	10	5	8
	3	4	5	8	

该公司应如何调运产品，可在满足各销售点需要量的前提下，使总运费最省？

4. 考虑表 4-42 所列运输问题，试着求出最优调运方案。

表 4-42　单位运价表

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	8	7	5	7
A_2	3	5	4	3	3
A_3	5	4	9	6	6
销量	4	4	3	3	

5. 求解表 4-43 所列运输问题的最优解。

表 4-43　单位运价表

	B_1	B_2	B_3	产量
A_1	5	9	2	15
A_2	3	1	7	18
A_3	6	2	8	17
销量	18	12	16	

6. 已知表 4-44 列运输问题。

表 4-44　单位运价表

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12	4	11	16
A_2	2	10	3	9	10
A_3	8	5	11	6	22
销量	8	14	12	14	

试用最小元素法给出该运输问题的初始调运方案并计算其总运费；判断该初始调运方案是否是最优方案。

7. 某运输问题的单位运价表见表 4-45。考虑到修路原因，暂时对产地 2 到销地 B 的道路进行封闭，求最优调运方案。

表 4-45　单位运价表

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	产量
1	10	20	5	9	10	9
2	2	10	10	30	6	4
3	1	20	7	10	4	8
销量	3	5	4	6	3	

8. 用表上作业法求表 4-46 所列运输问题的最优调运方案。

表 4-46　单位运价表

	A	*B*	*C*	*D*	产量
1	10	6	7	12	4
2	16	10	5	9	9
3	5	4	10	10	4
销量	5	2	4	6	

第 5 章　目 标 规 划

本章概要

学习目标　学完本章后，你将能够：

1. 理解目标规划的概念。
2. 掌握目标规划的建模技巧。
3. 能够运用图解法求解目标规划模型。
4. 能够运用单纯形法求解目标规划模型。

目标规划问题的案例

某电子厂生产录音机和电视机两种产品，分别由甲、乙两个车间生产。除外购件外，生产一台录音机需要在甲车间加工 2 h、乙车间装配 1 h；生产一台电视机需要在甲车间加工 1 h、乙车间装配 3 h。

这两种产品生产出来后均需经检验、销售等环节。已知每台录音机检验销售费用需 50 元，每台电视机检验销售费用需 30 元。甲车间每月可用的生产工时为 120 h，车间管理费用为 80 元/h；乙车间每月可用的生产工时为 150 h，车间管理费用为 20 元/h。

估计每台录音机利润为 100 元，每台电视机利润为 75 元，又估计下一年度平均每月可销售录音机 50 台、电视机 80 台。

工厂确定月度计划的目标如下：

第一优先级：检验和销售费用每月不超过 4600 元。

第二优先级：每月售出录音机不少于 50 台。

第三优先级：甲、乙车间的生产工时得到充分利用（重要性权系数按两个车间每小时费用的比例确定）。

第四优先级：甲车间加班不超过 20 h。

第五优先级：每月售出电视机不少于 80 台。

第六优先级：两个车间加班总时间要有控制（权系数分配与第三优先级相同）。

试确定该厂为达到以上目标的最优月度计划生产数字。

5.1　目标规划建模

目标规划是由线性规划演变而来的。1961 年美国的查恩斯和库珀提出了目标规划的有关概念和模型，后来得到不断完善和改进。线性规划研究资源有效分配和利用，是在满足一组约束条件的情况下寻求某一线性目标的极值；目标规划是实现目标管理的有效工具，它根据企业制定的经营目标以及这些经营目标的轻重缓急，考虑到现有资源情况，确定一个满意方案，使得工作结果达到规定目标或使差距最小。

5.1.1　目标规划的概念

在线性规划模型中，目标函数是单一的。在实践中，经常会遇到含有多个目标的数学规划问题，如利润最高、成本最低、产量高、质量好、用工最少等目标。这些目标之间往往是矛盾和冲突的，而且各个目标对于企业而言存在轻重缓急的关系，决策者希望实现综合最优。这类问题采用传统的线性规划是无法解决的。为了有效解决上述多目标决策问题，人们提出了目标规划建模及求解技术。

【例 5-1】（生产管理）某企业生产某种产品的生产方式有四种：正常生产、加班生产、转包合同和雇临时工生产。有关数据见表 5-1。在未来的一个计划期内，可利用总工时为 2000 h，原材料 2500 kg（每件产品消耗原料 2 kg），产品需求量为 800 件。

要求制定生产计划，使其尽可能达到以下三项指标：

（1）满足需要量。

（2）质量水平达到 98%。

（3）少于 7000 元的工时成本。

表 5-1　企业生产数据表

	正常生产	加班生产	转包合同	雇临时工
每件所需工时	2	2	2.5	3
工时成本	10	15	8	8
质量水平	99%	98%	95%	90%

【**解**】由于本例的生产方式有四种，故假设正常生产、加班生产、转包合同和雇临时工生产的量分别是 x_1，x_2，x_3，x_4 。

约束条件主要包括三个方面，即工时限制、原材料限制和非负限制，分别可以表示为

$$\text{s.t}:\begin{cases}2x_1+2x_2+2.5x_3+3x_4\leqslant 2000\\2x_1+2x_2+2x_3+2x_4\leqslant 2500\\x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0\end{cases}\tag{5-1}$$

（1）对需求量而言，现实生产中可能出现两种以下情形：

$x_1+x_2+x_3+x_4\leqslant 800$ 和 $x_1+x_2+x_3+x_4\geqslant 800$

（2）对产品质量而言，也可能出现以下两种情形：

$0.99x_1+0.98x_2+0.95x_3+0.9x_4\leqslant 0.98(x_1+x_2+x_3+x_4)$

$0.99x_1+0.98x_2+0.95x_3+0.9x_4\geqslant 0.98(x_1+x_2+x_3+x_4)$

（3）对工时成本而言，也可能出现以下两种情形：

$10x_1+15x_2+8x_3+8x_4\leqslant 7000$ 和 $10x_1+15x_2+8x_3+8x_4\geqslant 7000$

对上述任何目标出现的两种可能，均可以将其分别化简为以下等式：

（1）$x_1+x_2+x_3+x_4+s_1=800$ 和 $x_1+x_2+x_3+x_4-s_2=800$；

（2）$0.99x_1+0.98x_2+0.95x_3+0.9x_4+s_3=0.98(x_1+x_2+x_3+x_4)$，

$0.99x_1+0.98x_2+0.95x_3+0.9x_4-s_4=0.98(x_1+x_2+x_3+x_4)$；

（3）$10x_1+15x_2+8x_3+8x_4+s_5=7000$ 和 $10x_1+15x_2+8x_3+8x_4-s_6=7000$ 。

但决策者并不清楚哪一种可能性会出现，于是，将其均作为约束

$$\text{s.t}:\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+s_1-s_2=800\\0.01x_1-0.03x_3-0.08x_4+s_3-s_4=0\\10x_1+15x_2+8x_3+8x_4+s_5-s_6=7000\\x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ s_5,\ s_6\geqslant 0\end{cases}\tag{5-2}$$

三个目标是有次序和优先关系的，假定优先权重或系数分别表示为 P_1，P_2，P_3 。为了合成上述三个目标，首先需要了解每个目标的那种结果可能会发生。由于要求尽可能，所以最好是充分利用最佳，即 $s_1+s_2=0$ ，$s_3+s_4=0$ 和 $s_5+s_6=0$ 。可能在现实中无法实现都是零的可能，但是希望越小则越接近目标。于是，目标函数可以表示为

$$\min z=P_1(s_1+s_2)+P_2(s_3+s_4)+P_3(s_5+s_6)$$

同时，本例中还存在原材料和工时约束，于是，该目标规划模型可以表示为

$$\min z=P_1(s_1+s_2)+P_2(s_3+s_4)+P_3(s_5+s_6)$$

$$\text{s.t}:\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+s_1-s_2=800\\0.01x_1-0.03x_3-0.08x_4+s_3-s_4=0\\10x_1+15x_2+8x_3+8x_4+s_5-s_6=7000\\2x_1+2x_2+2.5x_3+3x_4\leqslant 2000\\2x_1+2x_2+2x_3+2x_4\leqslant 2500\\x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ s_5,\ s_6\geqslant 0\end{cases}\tag{5-3}$$

基于上述案例，在构建目标规划模型中，需要采用如下基本概念。

1. 偏差

如果将式(5-2)的左侧值，如 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ 看成实际值；右侧值，如 800 看成目标值，则可以作如下定义。

①正偏差 d^+ ：实际值高于目标值的部分；

②负偏差 d^- ：实际值小于目标值的部分。

在现实中，实际值和目标值的关系只有以下三种可能。

①实际值超过目标值：$d^+ > 0$，$d^- = 0$ ；

②实际值小于目标值：$d^+ = 0$，$d^- > 0$ ；

③实际值正好等于目标值：$d^+ = 0$，$d^- = 0$

无论出现何种情况，总有 $d^+ \times d^- = 0$ 。

2. 约束条件

在式(5-1)中，左侧值绝对高于、低于或等于右侧值，称为绝对约束，即必须严格满足的等式约束和不等式约束。通常也可以将绝对约束作为硬约束。

在式(5-2)中，约束的左侧值看成实际值，右侧值看成目标值，达到此目标值时允许发生正或负偏差，因此在这些约束中加入正、负偏差量，它们是软约束。

当然，对变量的约束可以称为非负约束。

目标规划模型可能仅仅含有软约束和非负约束，或者硬约束、软约束和非负约束并存。但是如果某目标规划模型存在硬约束，在建模时必须将其作为约束条件。

3. 优先因子和权系数

一个目标规划问题常常有若干目标。但决策者在要求达到这些目标时，是有主次或轻重缓急的不同。通常要求第一目标赋予优先因子 P_1 ，次位的目标赋予优先因子 P_2 ，逐步类推。

P_k 为常数，k 为目标级别，要求 P_k 远远大于 P_{k+1} ，即赋予 P_k 比 P_{k+1} 更大的优先权。首先保证 P_1 级目标的实现，可不考虑次级目标；而 P_2 级目标是在实现 P_1 级目标的基础上考虑的，依此类推。若要区别具有相同优先因子的两个目标的差别，这时可分别赋予它们不同的权系数 ω_j ，这些都依据具体情况而定。

4. 目标规划的目标函数

目标规划的目标函数是按各目标约束的正、负偏差变量和赋予相应的优先因子及权系数而构造的。当每一目标值确定后，决策者的要求是尽可能缩小偏离目标值。因此目标规划的目标函数只能是 $\min z = f(d^+, d^-)$ 。其基本形式有以下三种：

(1)要求恰好达到目标值，即正、负偏差量都要尽可能小，也即

$$\min z = f(d^+ + d^-)$$

(2)要求不超过目标值，即允许达不到目标值，就是正偏差变量要尽可能小，也即

$$\min z = f(d^+)$$

(3)要求超过目标值，即超过量不限，但必须是负偏差变量要尽可能小，也即

$$\min z = f(d^-)$$

对每一个具体目标规划问题，可根据要求和赋予各目标的优先因子来构造目标函数

5.1.2 目标规划的应用

目标规划的建模主要步骤如下。

第一步：假设相关变量。这与线性规划建模相同。

第二步：分析软约束，不论实际值与目标值的关系，即大于、等于还是小于，直接加上负偏差减去正偏差，接着分析约束要求，找出哪个偏差越小越好（见 5.1.1 节中目标规划的目标函数设定内容）。

第三步：寻求硬约束。如果存在硬约束，一定在约束条件中加以体现；如果没有，则直接采用软约束。

第四步：采用各级的优先因子乘以第二步找出的越小越好的偏差，然后累加，取最小值，即为目标函数。

第五步：基于目标函数、硬约束和软约束，加上非负约束，完成目标规划模型的构建。

【例 5-2】（生产管理）某公司分厂用一条生产线生产两种产品 A 和 B，每周生产线运行时间为 60 h，生产一台 A 产品需要 4 h，生产一台 B 产品需要 6 h。根据市场预测，A、B 产品平均销售量分别为每周 9 台、8 台，销售利润分别为 12 万元、18 万元。在制定生产计划时，经理考虑下述四项目标：

（1）产量不能超过市场预测的需求。

（2）工人加班时间最少。

（3）希望总利润不少于 250 万元。

建立这个问题的数学模型。

【解】首先需要假设变量，由于生产计划中核心是确定两种产品的产量，故假设 A 和 B 的产量分别为 x_1，x_2。

接着，基于四个目标分别建立约束条件。由于软约束中，无法确认偏差类型，因此在构建时全部加上负偏差减去正偏差。

（1）$x_1 + d_1^- - d_1^+ = 9$，$x_2 + d_2^- - d_2^+ = 8$；

（2）$4x_1 + 6x_2 + d_3^- - d_3^+ = 60$；

（3）$12x_1 + 18x_2 + d_4^- - d_4^+ = 250$。

对应上述目标，第一是左侧不能超过右侧，故希望 d_1^+，d_2^+ 越小越好；第二是加班时间最少，即 d_3^+ 越小越好；第三是希望 d_4^- 越小越好。这些越小越好的变量须在目标函数中得以体现，于是，该问题的目标规划模型可以表示为

$$\min z = P_1(d_1^+ + d_2^+) + P_2 d_3^+ + P_3 d_4^-$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + d_1^- - d_1^+ = 9 \\ x_2 + d_2^- - d_2^+ = 8 \\ 4x_1 + 6x_2 + d_3^- - d_3^+ = 60 \\ 12x_1 + 18x_2 + d_4^- - d_4^+ = 250 \\ x_1,\ x_2,\ d_i^-,\ d_i^+ \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

【例 5-3】（人力资源管理）某单位制定职工升级计划，A 级将有 10% 的人要退休，退休后工资由福利基金中开支，基本情况见表 5-2。

表 5-2　职工基本情况表

等级	月工资/元	现有人数	编制人数
A	2000	100	120
B	1500	120	150
C	1000	150	150

该单位管理层经过一致讨论，要求：

(1)月工资总额不能超过 600 000 元。

(2)提级时，每级的定编人数不能超过编制。

(3)升级面不超过现有人数的 20%。

【解】设由 B 级提升到 A 级的人数为 x_1，C 级提升到 B 级的人数为 x_2，新职工提升到 C 级的人数为 x_3。三级目标的优先因子分别为 P_1, P_2, P_3。

(1)月工资表示为

$2000(100-100\times0.1+x_1)+1500(120-x_1+x_2)+1000(150-x_2+x_3)\geqslant(\leqslant)600000$

即 $x_1+x_2+2x_3+d_1^- -d_1^+=180$，希望 d_1^+ 越小越好。

(2)编制约束

① $100\times0.9+x_1+d_2^- -d_2^+=120$，即 $x_1+d_2^- -d_2^+=30$；

② $120-x_1+x_2+d_3^- -d_3^+=150$，即 $-x_1+x_2+d_3^- -d_3^+=30$；

③ $150-x_2+x_3+d_4^- -d_4^+=150$，即 $-x_2+x_3+d_4^- -d_4^+=0$。

上述三者中，均希望 d_2^+、d_3^+、d_4^+ 越小越好。

(3)升级面约束为

$$x_1+d_5^- -d_5^+=24,\ x_2+d_6^- -d_6^+=30$$

希望 d_5^+、d_6^+ 越小越好。

于是，该问题的目标规划模型为

$$\min z=P_1(d_1^+)+P_2(d_2^++d_3^++d_4^+)+P_3(d_5^++d_6^+)$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+d_1^- -d_1^+=180\\ x_1+d_2^- -d_2^+=30\\ -x_1+x_2+d_3^- -d_3^+=30\\ -x_2+x_3+d_4^- -d_4^+=0\\ x_1+d_5^- -d_5^+=24\\ x_2+d_6^- -d_6^+=30\\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ d_i^-,\ d_i^+\geqslant0\quad(i=1,\cdots,6)\end{cases}$$

【例 5-4】(规划管理)某地区投资部门有一笔资金，在下一个计划期内可向钢铁、化工、石油等行业投资建新厂。这些工厂能否预期建成是一定风险的，在建成投产后，其收入与投资额有关，各工厂的建设方案的风险因子及投产后可增收入的百分比例见表 5-3。

表 5-3　风险因子及增加收入表

行业	建设方案	风险因子 r_i	增加收入 g_i
钢铁	1	0.2	0.5
	2	0.2	0.5
	3	0.3	0.3
	4	0.3	0.4

（续表）

行业	建设方案	风险因子 r_i	增加收入 g_i
化工	5	0.4	0.6
	6	0.2	0.4
	7	0.5	0.6
石油	8	0.7	0.5
	9	0.6	0.1
	10	0.4	0.6
	11	0.1	0.3

投资部门根据该地区情况提出以下要求：用于钢铁的投资额不超过总资金的35%；用于化工的投资额至少占总资金的15%；用于石油的投资不超过总资金的50%。并且，首先要考虑总风险因子不超过0.2；其次考虑总收入至少要增加0.55%；然后再考虑各项投资的总和不能超过总资金额。现在要确定对不同行业的各投资方案所占的比例。

【解】假定 x_i 为第 i 方案投资占总投资额的百分比，总比例为100%。

在该目标规划模型中，存在如下硬约束。

①用于钢铁的投资额不超过总资金的35%：$x_1+x_2+x_3+x_4\leqslant 0.35$；

②用于化工的投资额至少占总资金的15%：$x_5+x_6+x_7\geqslant 0.15$；

③用于石油的投资不超过总资金的50%：$x_8+x_9+x_{10}+x_{11}\leqslant 0.5$。

在目标约束中，主要包括：

①总风险因子不超过0.2：$\sum_{i=1}^{11} r_i x_i + d_1^- - d_1^+ = 0.2$，希望 d_1^+ 越小越好。

②总收入至少要增长0.55%：$\sum_{i=1}^{11} g_i x_i + d_2^- - d_2^+ = 0.55$，希望 d_2^- 越小越好。

③各项投资的总和不能超过总资金额：$\sum_{i=1}^{11} x_i + d_3^- - d_3^+ = 1$，希望 d_3^+ 越小越好。

于是，该问题的目标规划模型表示为

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^- + P_3 d_3^+$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4\leqslant 0.35 \\ x_5+x_6+x_7\geqslant 0.15 \\ x_8+x_9+x_{10}+x_{11}\leqslant 0.5 \\ \sum_{i=1}^{11} r_i x_i + d_1^- - d_1^+ = 0.2 \\ \sum_{i=1}^{11} g_i x_i + d_2^- - d_2^+ = 0.55 \\ \sum_{i=1}^{11} x_i + d_3^- - d_3^+ = 1 \\ x_1,\cdots,x_{11}\geqslant 0;\ d_j^-,\ d_j^+\geqslant 0(j=1,2,3) \end{cases}$$

【例5-5】（生产管理）某公司生产两种型号的产品，一种为普通型，装配需要1 h；另外一种为豪华型，装配需要2 h。正常的装配时间每周限定为40 h。市场调查的结果表明，每周销售普通型产品不会超过30件，豪华型不会超过15件。净利润普通型每件为8元，豪华型每件为12元。

公司领导提出了如下要求：

(1)总利润不能低于 400 元；

(2)充分利用装配线工时；

(3)根据市场调研要求每周生产产品数不能多于销售数量，即普通型为 30 件，豪华型为 15 件。

【解】设普通产品和豪华产品的生产量分别为 x_1、x_2，于是，目标规划模型为

$$\min z = P_1 d_1^- + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3(d_3^+ + d_3^+)$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} 8x_1 + 12x_2 + d_1^- - d_1^+ = 400 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 40 \\ x_1 + d_3^- - d_3^+ = 30 \\ x_2 + d_4^- - d_4^+ = 15 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geqslant 0 (i = 1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

【例 5-6】(生产管理)某制药公司有甲和乙两个工厂，现要生产 A、B 两种药品(均需要在这两个工厂生产)，A 药品在甲厂加工 2 h，然后送到乙厂检测、包装 2.5 h 才能成品；B 药品在甲厂加工 4 h，然后送到乙厂检测、包装 1.5 h 才能成品。

A、B 两种药品在公司内每月的储存费分别为 8 元和 15 元。甲厂有 12 台制造机器，每台每天工作 8 h，每月正常工作 25 天；乙厂有 7 台检测包装机，每天每台工作 16 h，每月也正常工作 25 天。

每台机器每小时运行成本：甲厂为 18 元，乙厂为 15 元。单位产品 A 的销售利润为 20 元，B 为 23 元。依照市场预测，次月 A、B 的销售量估计分别为 1500 单位和 1000 单位。

该公司依照下列次序为目标的有限次序，实现次月的生产和销售目标，试确定 A、B 药品各生产多少，可使得目标达到最优。

(1)场内的储存成本不超过 23000 元。

(2)A 销售量必须完成 1500 单位。

(3)甲、乙厂的设备应全力运转，避免有空闲时间，两厂的单位运转成本当作权系数。

(4)甲厂的作业时间全月不宜超过 30 h。

(5)B 药的销售量必须完成 1000 单位。

【解】假设两种药品的生产量分别为 x_1、x_2，于是，目标规划模型为

$$\min z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^- + P_3(6d_3^- + 5d_4^-) + P_4 d_5^+ + P_5 d_6^-$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} 8x_1 + 15x_2 + d_1^- - d_1^+ = 23000 \\ x_1 + d_4^- - d_4^+ = 1500 \\ 2x_1 + 4x_2 + d_1^- - d_1^+ = 2400 \\ 2.5x_1 + 1.5x_2 + d_2^- - d_2^+ = 2800 \\ d_1^+ + d_5^- - d_5^+ = 30 \\ x_2 + d_6^- - d_6^+ = 1000 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geqslant 0 \quad (i = 1, \cdots, 6) \end{cases}$$

【例 5-7】(运输问题)已知三个工厂 A、B、C 生产的产品供应四个用户 D、E、F、G，各工厂生产量、用户需求量及从各工厂到用户的单位产品的运输费用见表 5-4。

表 5-4　运输费用表

	D	E	F	G	生产量
A	5	2	6	7	300
B	3	5	4	6	200
C	4	5	2	3	400
需求量	200	100	450	250	

上级部门研究后确定了制定调配方案时要考虑的七项目标，并规定重要性次序以下。

第一目标：G 用户为重要部门，需要量必须全部满足。

第二目标：供应用户 D 的产品中，工厂 C 的产品不少于 100 单位。

第三目标：每个用户满足率不低于 80%。

第四目标：新方案总运费不超过原方案的 10%。

第五目标：因道路限制，从工厂 B 到用户 G 的路线应尽量避免分配运输任务。

第六目标：用户 D 和用户 F 的满足率应尽量保持平衡。

第七目标：力求减少总运费。

【解】假定 x_{ij} 为工厂 i 运输到用户 j 的数量。该运输问题为产销不平衡的运输问题，需要增加一个假想的产地 H。上述软约束分别以下。

(1)第一目标：$x_{14}+x_{24}+x_{34}+d_1^- - d_1^+ = 250$，即要求 $d_1^- + d_1^+$ 越小越好。

(2)第二目标：$x_{34}+d_2^- - d_2^+ = 100$，即 d_2^- 越小越好。

(3)第三目标的约束包括：

① $x_{11}+x_{21}+x_{31}+d_3^- - d_3^+ = 160$；

② $x_{12}+x_{22}+x_{32}+d_4^- - d_4^+ = 80$；

③ $x_{13}+x_{23}+x_{33}+d_5^- - d_5^+ = 360$；

④ $x_{14}+x_{24}+x_{34}+d_6^- - d_6^+ = 200$。

希望 d_3^-，d_4^-，d_5^-，d_6^- 越小越好。

(4)第四目标：由表 5-4 可得最优运费为 2950 元，故 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} + d_7^- - d_7^+ = 3245$，希望 d_7^+ 越小越好。

(5)第五目标：$x_{24}+d_8^- - d_8^+ = 0$，希望 d_8^+ 越小越好。

(6)第六目标：$(x_{11}+x_{21}+x_{31}) - \frac{200}{450}(x_{13}+x_{23}+x_{33}) + d_9^- - d_9^+ = 0$，希望 $d_9^- + d_9^+$ 越小越好。

(7)第七目标：$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} + d_{10}^- - d_{10}^+ = 2950$，希望 d_{10}^+ 越小越好。

同时，本例还存在一些硬约束，主要是：$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=300$，$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=200$，$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=400$，$x_{11}+x_{21}+x_{31}\leqslant 200$，$x_{12}+x_{22}+x_{32}\leqslant 100$，$x_{13}+x_{23}+x_{33}\leqslant 450$，$x_{14}+x_{24}+x_{34}\leqslant 250$。

该问题的目标规划模型为

$$\min z = P_1(d_1^- + d_1^+) + P_2 d_2^- + P_3(d_3^- + d_4^- + d_5^- + d_6^-) + P_4 d_7^+ + P_5 d_8^+ + P_6(d_9^- + d_9^+) + P_7 d_{10}^+$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} x_{14} + x_{24} + x_{34} + d_1^- - d_1^+ = 250 \\ x_{34} + d_2^- - d_2^+ = 100 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + d_3^- - d_3^+ = 160 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + d_4^- - d_4^+ = 80 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + d_5^- - d_5^+ = 360 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + d_6^- - d_6^+ = 200 \\ \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} + d_7^- - d_7^+ = 3245 \\ x_{24} + d_8^- - d_8^+ = 0 \\ (x_{11} + x_{21} + x_{31}) - \dfrac{200}{450}(x_{13} + x_{23} + x_{33}) + d_9^- - d_9^+ = 0 \\ \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} + d_{10}^- - d_{10}^+ = 2950 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 300 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 200 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 400 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \leqslant 200 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \leqslant 100 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \leqslant 450 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \leqslant 250 \\ x_{ij} \geqslant 0;\ d_k^-,\ d_k^+ \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3, 4,\ k = 1, \cdots, 10) \end{cases}$$

5.2　目标规划求解及灵敏度分析

5.2.1　目标规划的图解法

目标规划的图解法解题步骤以下：

(1)确定各约束条件的可行域，即将所有约束条件(包括目标约束和绝对约束，暂不考虑正、负偏差变量)表示于坐标平面。

(2)在目标约束所代表的边界线上，用箭头标出正、负偏差变量值增大的方向。

(3)求满足最高优先等级目标的解。

(4)转到下一个优先等级的目标，在不破坏所有较高优先等级目标的前提下，求出该优先等级目标的解。

(5)重复(4)，直到所有优先等级的目标都已审查完毕为止。

(6)确定最优解和满意解。

【例 5-8】用图解法解下列目标规划模型：

$$\min z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3 d_3^-$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}5x_1 + 10x_2 \leqslant 60 \\ x_1 - 2x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + d_2^- - d_2^+ = 36 \\ 6x_1 + 8x_2 + d_3^- - d_3^+ = 48 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0,\ d_i^-,\ d_i^+ \geqslant 0,\ i = 1,2,3\end{cases}$$

【解】将约束方程以直线形式画在图上，这里只使用决策变量(即 x_1、x_2)，偏差变量在画直线时被去掉。画好直线后，在该直线上标出目标函数中与该直线相关的偏差变量增大时直线的平移方向(用垂直于直线的箭头来表示)。假定四个约束条件分别用 l_1、l_2、l_3、l_4 表示，上述目标规划模型可以用图 5-1 表示。

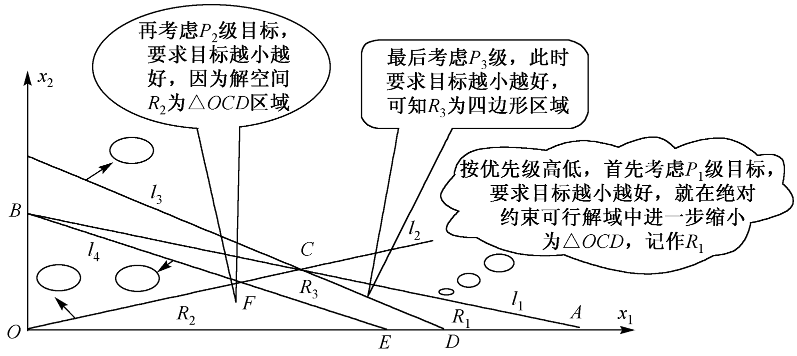


图 5-1 【例 5-8】图解法图

$CDEF$ 所包含的区域内任一点均是该问题的满意解，可使目标函数值为零。

由于 C、D、E、F 的坐标分别为(6, 3)、(9, 0)、(8, 0)、(4.8, 2.4)，满意解可表示为

$$(x_1,\ x_2) = \alpha_1(6,\ 3) + \alpha_2(9,\ 0) + \alpha_3(8,\ 0) + \alpha_4(4.8,\ 2.4)$$
$$= (6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 8\alpha_3 + 4.8\alpha_4,\ 3\alpha_1 + 2.4\alpha_4)$$

其中，$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$，$\alpha_i \geqslant 0(i = 1, 2, 3, 4)$。

【例 5-9】用图解法解下列目标规划模型。

$$\min z = P_1(d_1^- + d_1^+) + P_2(d_2^- + d_3^-) + P_3(3d_2^+ + d_3^+)$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}15x_1 + 25x_2 + d_1^- - d_1^+ = 750 \\ x_1 + 3x_2 + d_2^- - d_2^+ = 60 \\ x_1 + x_2 + d_3^- - d_3^+ = 40 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, 3)\end{cases}$$

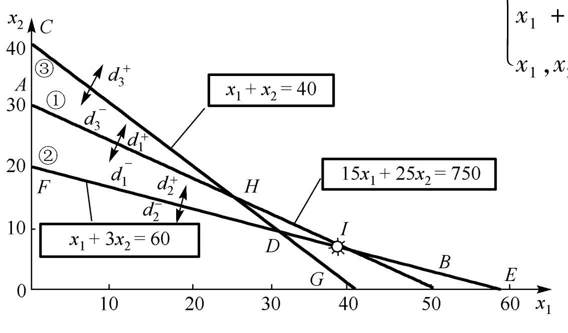


图 5-2 【例 5-9】图解法图

【解】该目标规划的图解法如图 5-2 所示。

图中，P_1 级目标为线段 AB，P_1 级和 P_2 级目标为线段 HI，P_1 级、P_2 级和 P_3 级目标中，H 点坐标为(25, 15)，$d_2^+ = 10$，$\min z = 30P_3$；I 点坐标为(37.5, 5.5)，$d_3^+ = 5$，$\min z = 5P_3$。因此，最小点为 I 点。

5.2.2　目标规划的单纯形法

目标规划的数学模型，特别是约束的结构与线性规划模型没有本质的区别，只是它的目标不止是一个，虽然其利用优先因子和权系数把目标写成一个函数的形式，但在计算中无法按单目标处理，所以可用单纯形法进行适当改进后求解。

解目标规划问题的单纯形法的计算步骤如下：

(1)建立初始单纯形表，在表中将检验数行按优先因子个数分别列成 K 行，设 $k = 1$ 。

(2)检查该行中是否存在负数，且对应的前 $k-1$ 行的系数是零。若有负数，取其中最小者对应的变量为换入变量，转至步骤(3)；若无负数，则转至步骤(5)。如果检验数行中出现负数，可能其检验数为正数，此时也转至步骤(5)。

(3)按最小比值规则确定换出变量，当存在两个和两个以上相同的最小比值时，选取具有最高优先级别的变量为换出变量。

(4)按单纯形法进行基变换运算，建立新的计算表，返回至步骤(2)。

(5)当 $k = K$ 时，计算结束，表中的解是满意解，否则置 $k = k + 1$ ，返回至步骤(2)。

要说明的是，检验数行中尽管有负数，但如果求第 K 行的检验数，假定均为正数，则说明获得最优解。

【例 5-10】试用单纯形法来求解下列目标规划模型：

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_s = 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1,\ x_2,\ d_i^-,\ d_i^+ \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ 3 \end{cases}$$

【解】(1)构建单纯形表，见表 5-5。

表 5-5　初始单纯形表

c_j			0	0	0	0	P_1	P_2	P_2	P_3		θ
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_s	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
0	x_s	11	2	1	1							11
0	d_1^-	0	1	−1		1	−1					
P_2	d_2^-	10	1	[2]				1	−1			5
P_3	d_3^-	56	8	10						1	−1	5.6
$c_j - z_j$	P_1						1					
	P_2		−1	−2					2			
	P_3		−8	−10							1	

(2)取 $k = 1$ ，检查 P_1 行的检验数，因该行无负检验数。

(3)增加 k 值，P_2 行中检验数有负数，取最小值 −2，对应的变量 x_2 为换入变量，见表 5-6。

表 5-6　第一次迭代的单纯形表

c_j							P_1	P_2	P_2	P_3		θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_s	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
0	x_s	6	1.5		1			−0.5	0.5			4
0	d_1^-	5	1.5			1	−1	0.5	−0.5			3.33
0	x_2	5	0.5					0.5	−0.5			10
P_3	d_3^-	6	[3]	1				−5	5	1	−1	2
$c_j - z_j$	P_1						1					
	P_2							1	1			
	P_3		−3					5	−5		1	

（4）再次迭代，将 d_3^- 作为出基变量，x_1 作为进基变量，结果见表 5-7。

表 5-7　第二次迭代的单纯形表

c_j							P_1	P_2	P_2	P_3		θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_s	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
	x_s	3			1			2	−2	−0.5	0.5	6
	d_1^-	2				1	−1	3	−3	−0.5	0.5	4
	x_2	4		1				1.33	−1.33	−0.67	0.33	12
	x_1	2	1					−1.67	1.67	0.33	−0.33	–
$c_j - z_j$	P_1						1					
	P_2							1	1			
	P_3									1		

（5）上述解为满意解。由于表 5-5 中 d_3^+ 的检验数为 0，因此可以再次迭代，得到表 5-8。

表 5-8　第三次迭代的单纯形表

c_j							P_1	P_2	P_2	P_3		θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_s	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
	x_s	1			1	−1	1	−1	1			
	d_3^+	4				2	−2	6	−6	−1	1	
	x_2	3.33		1		−0.33	0.33	0.33	−0.33			
	x_1	3.33	1			0.67	−0.67	0.33	−0.33			
$c_j - z_j$	P_1						1					
	P_2							1	1			
	P_3									1		

5.2.3　目标规划的灵敏度分析

尽管目标规划的灵敏度分析与线性规划的灵敏度分析类似，但大部分集中在优先系数的调整或偏差的调整。

【例 5-11】考虑下列目标规划问题：

$$\min z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3 d_3^-$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} -5x_1 + 5x_2 + 4x_3 + d_1^- - d_1^+ = 100 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + d_2^- - d_2^+ = 20 \\ 12x_1 + 4x_2 + 10x_3 + d_3^- - d_3^+ = 90 \\ x_i,\ d_i^-,\ d_i^+ \geqslant 0 (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

(1) 求出该目标规划模型的满意解。

(2) 如果约束右端项增加 $\Delta \boldsymbol{b} = (0, 0, 5)$，则满意解将如何改变？

(3) 如果目标函数改变为 $\min z = P_1(d_1^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$，则满意解将如何改变？

(4) 若第二个约束右端项改为 45，则满意解将如何改变？

【解】(1) 该目标规划问题的最终单纯形表见表 5-9。

表 5-9　最终单纯形表

c_j						P_1			P_2	P_3		θ
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_s	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
P_2	d_2^+	0			−11/5	1/5	−1/5	−1	1			
	x_2	165/8		1	5/4	3/20	−3/20			1/16	−1/16	
	x_1	5/8	1		9/20	−1/20	1/20			1/16	−1/16	
$c_j - z_j$	P_1					1						
	P_2				11/5	−1/5	1/5	1	1			
	P_3									1		

(2) 如果在约束的右端项增加 $\Delta \boldsymbol{b} = (0,0,5)$，则

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1 & 0 \\ 3/20 & 0 & 1/16 \\ -1/20 & 0 & 1/16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 20 \\ 95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 335/16 \\ 15/16 \end{pmatrix} \geqslant 0$$

因此，满意解为 $x_1 = 15/16$，$x_2 = 335/16$。

(3) 如果目标函数发生改变，则单纯形表见表 5-10。

表 5-10　改变的单纯形表

c_j						P_1			P_2	P_3		θ
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_s	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
P_1	d_2^+	0			−11/5	1/5	−1/5	−1	1			
	x_2	165/8		1	5/4	3/20	−3/20			1/16	−1/16	
	x_1	5/8	1		9/20	−1/20	1/20			1/16	−1/16	
$c_j - z_j$	P_1				11/5	4/5	1/5					
	P_2							1				
	P_3									1		

此时，满意解不发生改变。

如果第二个约束项改成 45，则

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1 & 0 \\ 3/20 & 0 & 1/16 \\ -1/20 & 0 & 1/16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 45 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ 335/16 \\ 15/16 \end{pmatrix}$$

于是需要进行迭代，见表 5-11。

表 5-11　第一次迭代的单纯形表

c_j						P_1			P_2	P_3		θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_s	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
	d_2^-	25			11/5	−1/5	1/5	1	−1			
	x_2	165/8		1	5/4	3/20	−3/20			1/16	−1/16	
	x_1	5/8	1		9/20	−1/20	1/20			1/16	−1/16	
$c_j - z_j$	P_1					1						
	P_2								1			
	P_3									1		

本章要点

学习本章，首先应该明确目标规划与线性规划在处理问题的方法上的区别与联系；其次要了解目标规划数学模型的相关概念：正、负偏差变量，绝对约束和目标约束，优先因子与权系数，目标规划的目标函数。只有了解了这些基本的概念，才能更好地理解和建立目标规划的数学模型。

学会运用图解法求解目标规划问题的模型，这有助于加深对目标规划问题的理解。

目标规划的数学模型结构与线性规划的数学模型结构形式上没有本质的区别，所以可用单纯形法求解。解目标规划问题的单纯形法的计算步骤是读者应该掌握的。目标规划问题的灵敏度分析主要是针对改变目标优先等级的分析。

关键公式

● 目标规划问题的一般数学模型

$$\min z = \sum_{l=1}^{L} P_l \sum_{k=1}^{K} (w_{lk}^- d_k^- + w_{lk}^+ d_k^+)$$

$$\text{s.t}: \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j + d_k^- - d_k^+ = g_k & (k = 1, \cdots, K) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant (=, \geqslant) b_i & (i = 1, \cdots, m) \\ x_j \geqslant 0 & (j = 1, \cdots, n) \\ d_k^-, d_k^+ \geqslant 0 & (k = 1, \cdots, K) \end{cases}$$

式中，w_{ik}^-、w_{ik}^+ 为权系数。

案例解析

假设每月生产录音机和电视机的台数分别为 x_1、x_2，其软约束条件可以表示如下：

(1)检验和销售费用限制：$50x_1 + 30x_2 + d_1^- - d_1^+ = 4600$，希望 d_1^+ 越小越好。

(2)每月生产录音机不少于 50 台：$x_1 + d_2^- - d_2^+ = 50$，希望 d_2^- 越小越好。

(3)甲、乙车间的生产工时得到充分利用(重要性权系数按两个车间每小时费用的比例

确定)：$2x_1 + x_2 + d_3^- - d_3^+ = 120$，$x_1 + 3x_2 + d_4^- - d_4^+ = 150$，希望 d_3^- 和 d_4^- 越小越好。

(4)甲车间加班不超过 20 h：$d_3^+ + d_5^- - d_5^+ = 20$，希望 d_5^+ 越小越好。

(5)每月生产电视机不少于 80 台：$x_2 + d_6^- - d_6^+ = 80$，希望 d_6^- 越小越好。

(6)两个车间加班总时间要有控制(权系数分配与第三优先级相同)。

于是，其目标规划模型可以表示为

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^- + P_3(4d_3^- + d_4^-) + P_4 d_5^+ + P_5 d_6^- + P_6(4d_3^+ + d_4^+)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 50x_1 + 30x_2 + d_1^- - d_1^+ = 4600 \\ x_1 + d_2^- - d_2^+ = 50 \\ 2x_1 + x_2 + d_3^- - d_3^+ = 120 \\ x_1 + 3x_2 + d_4^- - d_4^+ = 150 \\ d_3^+ + d_5^- - d_5^+ = 20 \\ x_2 + d_6^- - d_6^+ = 80 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0,\ d_i^-,\ d_i^+ \geqslant 0,\ i = 1, \cdots, 6 \end{cases}$$

采用 LINGO 软件计算上述问题的满意解，其主要步骤如下。

(1)运行以下程序(如图 5-3 所示)：

```
Min = x4;
50* x1 +30* x2 + x3 - x4 =4600;
x1 + x5 - x6 =50;
2* x1 + x2 + x7 - x8 =120;
x1 +3* x2 + x9 - x10 =150;
x8 + x11 - x12 =20;
x2 + x13 - x14 =80;
```

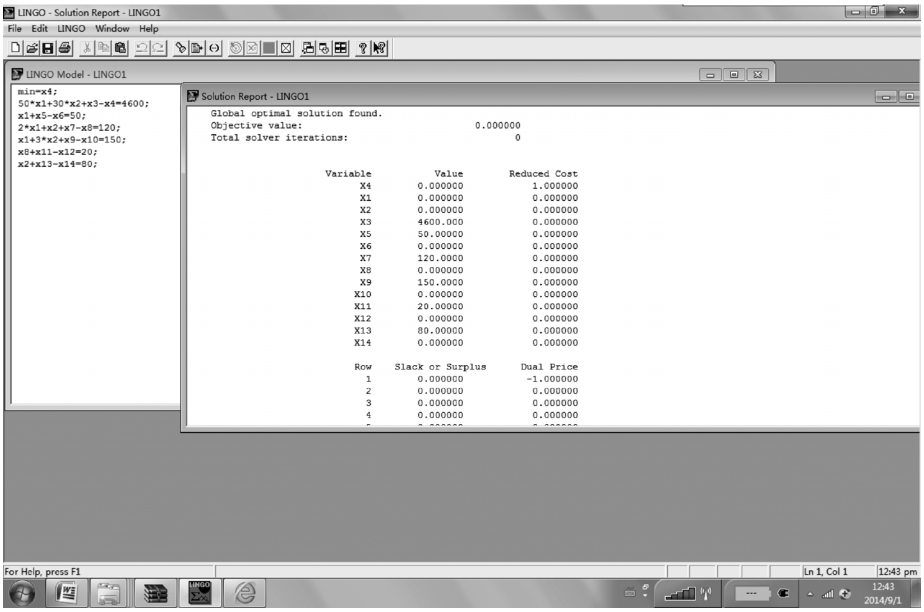


图 5-3

（2）由于 $x_4 = 0$，故在原模型的约束条件中删除 x_4，接着计算第二级目标（如图5-4 所示）：

```
Min = x5;
50* x1 + 30* x2 + x3 = 4600;
x1 + x5 - x6 = 50;
2* x1 + x2 + x7 - x8 = 120;
x1 + 3* x2 + x9 - x10 = 150;
x8 + x11 - x12 = 20;
x2 + x13 - x14 = 80;
```

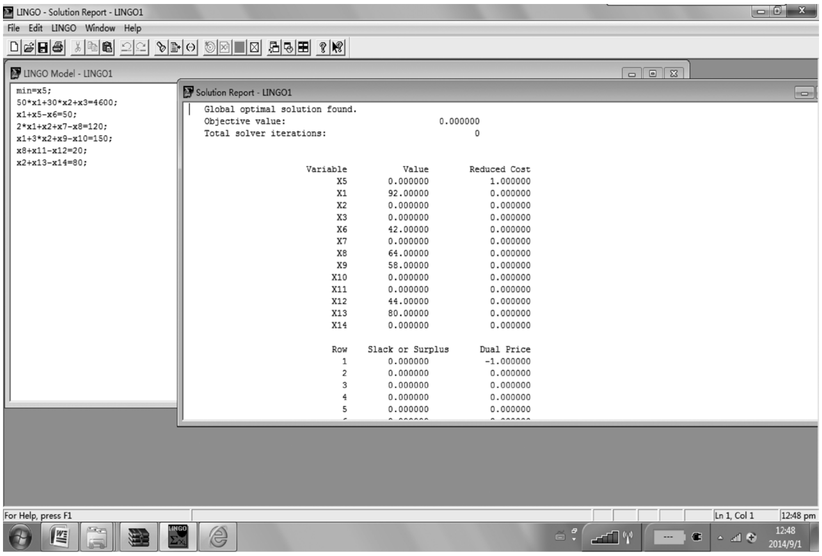


图 5-4

（3）计算第三级目标，如图 5-5 所示。

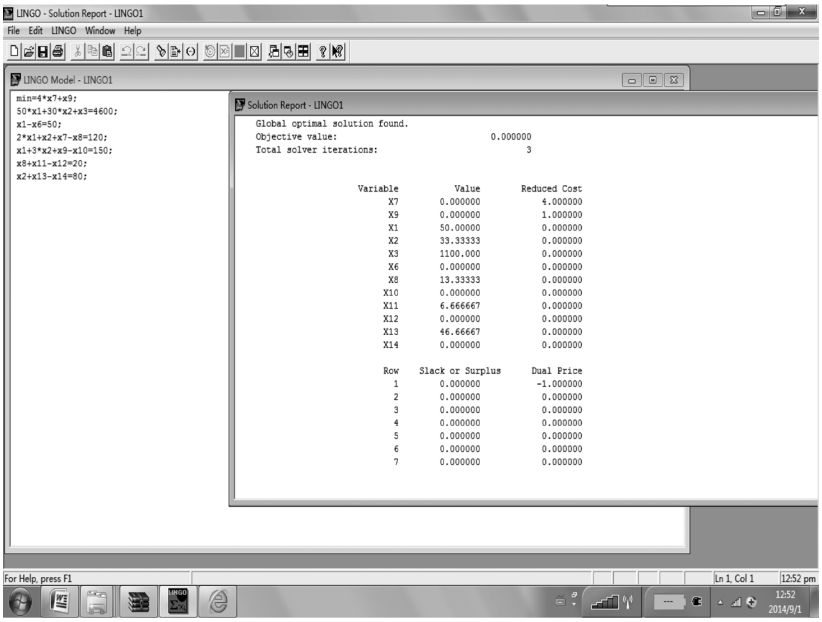


图 5-5

（4）计算第四级目标，如图 5-6 所示。

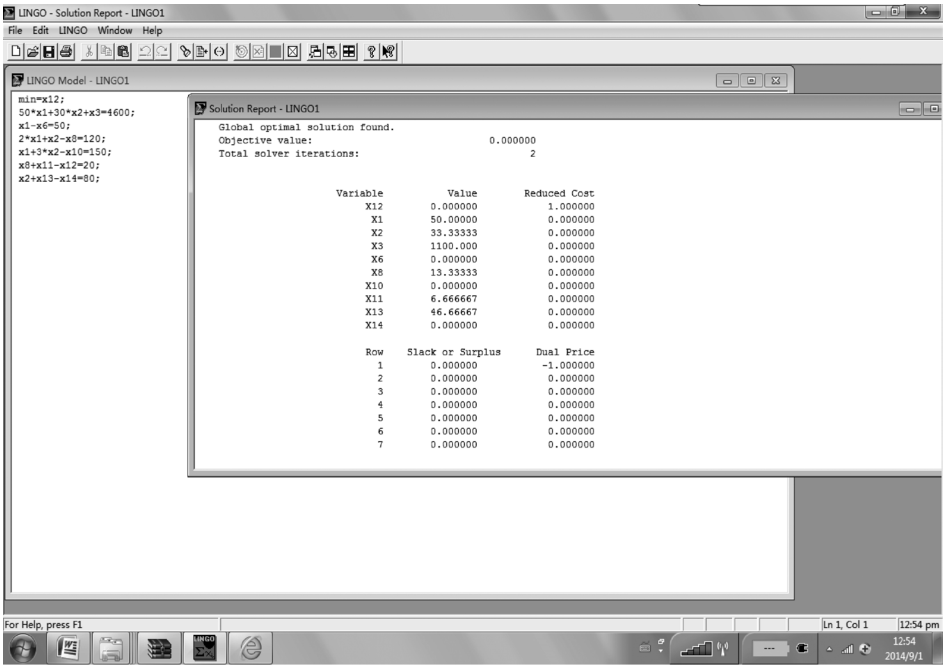


图 5-6

（5）计算第五级目标，如图 5-7 所示。

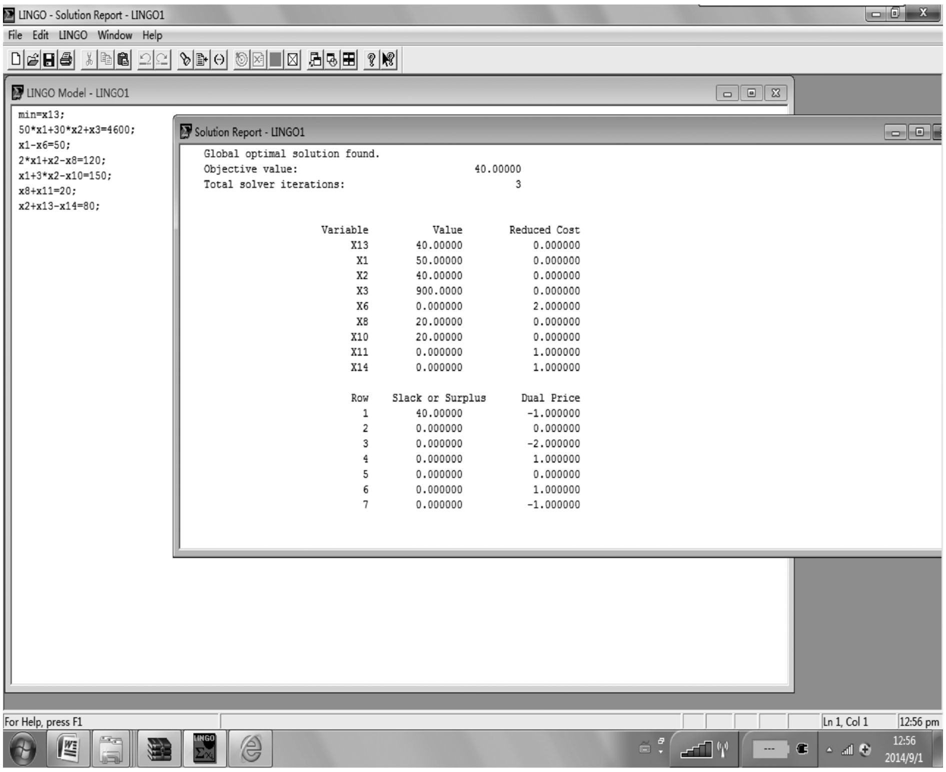


图 5-7

(6)此时，$x_{13} = 40$，代入到约束条件中，再次运行，如图 5-8 所示。

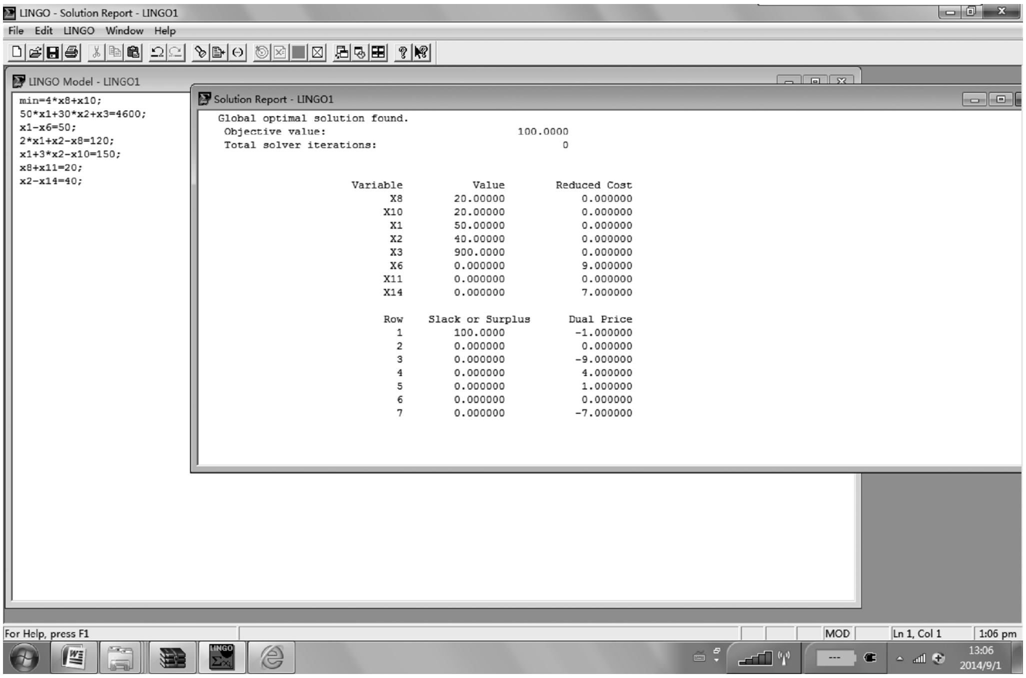


图 5-8

(7)于是，本题的满意解为 $x_1 = 50$，$x_2 = 40$。

如果采用 Excel 求解上述目标规划问题，则首先输入相关常数，如图 5-9 所示。

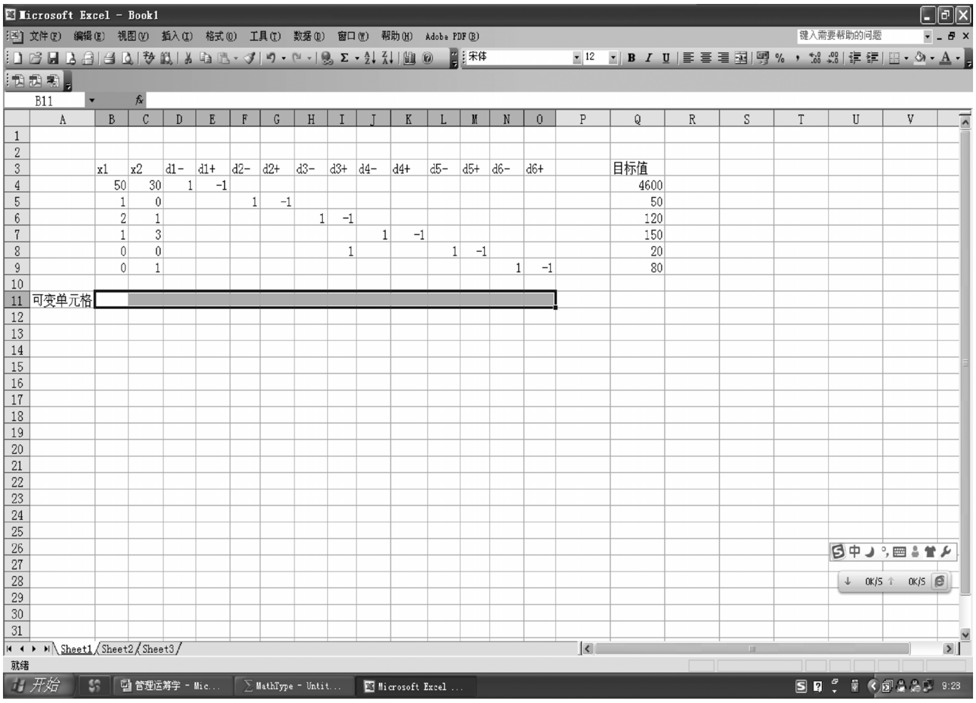


图 5-9

接着，采用 SUMPRODUCT 函数计算实际值，如图 5-10 所示。

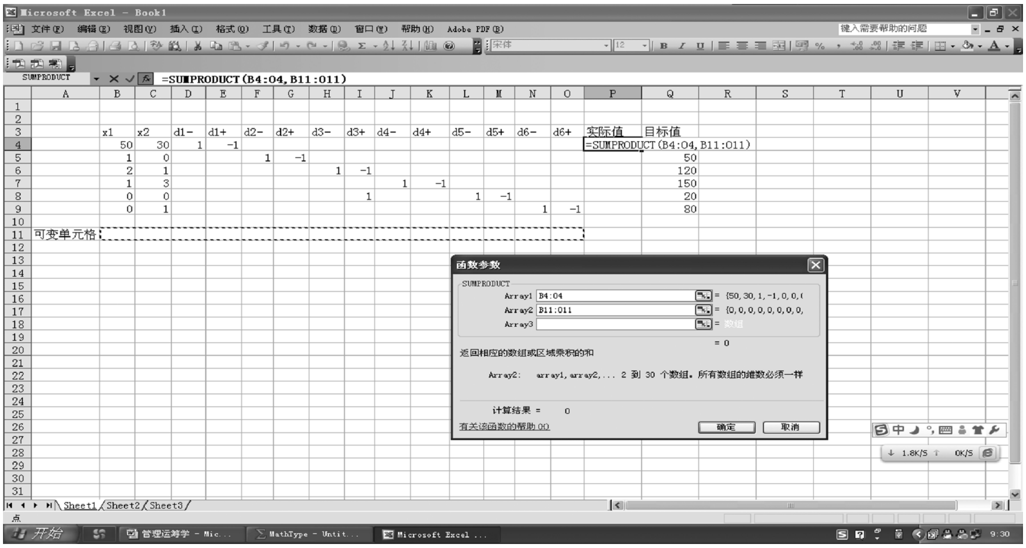


图 5-10

任意选择一格为目标单元格，可以得到如图 5-11 结果。

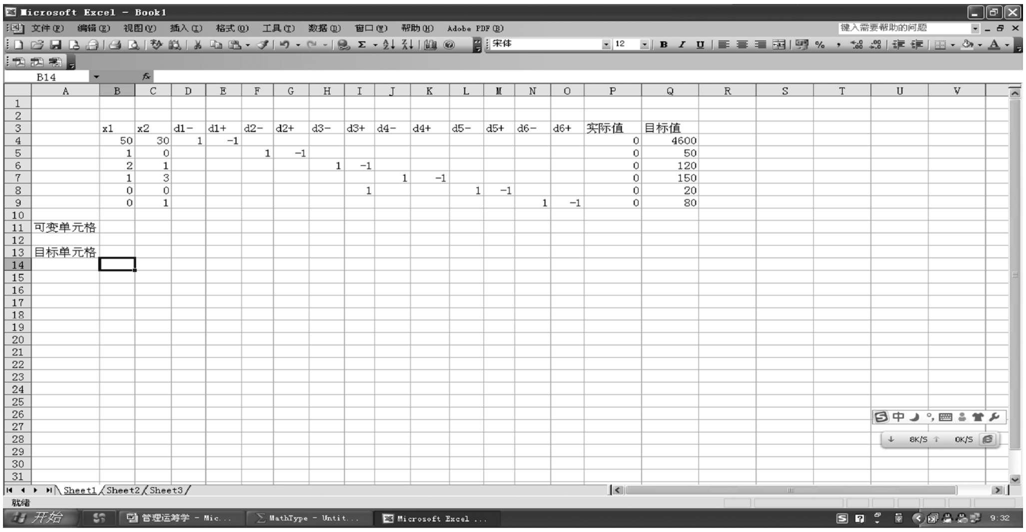


图 5-11

由于第一级目标是 $P_1d_1^+$ 越小越好，即 d_1^+ 越小越好，故目标单元格为 d_1^+，如图 5-12 所示。

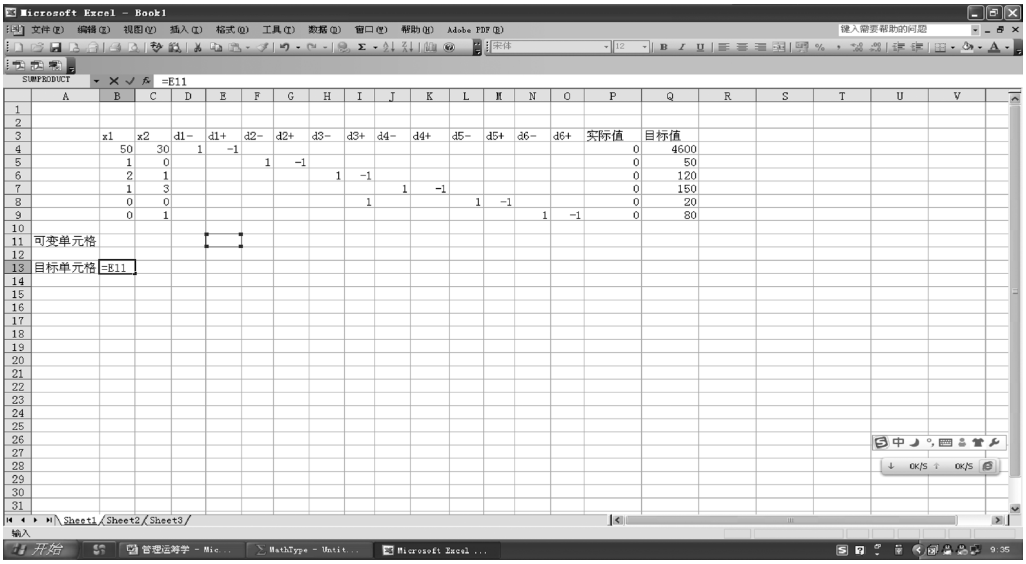


图 5-12

单击“工具”菜单中的“规划求解”命令项，打开对话框，如图 5-13 所示，按照要求输入目标单元格、可变单元格和约束条件。

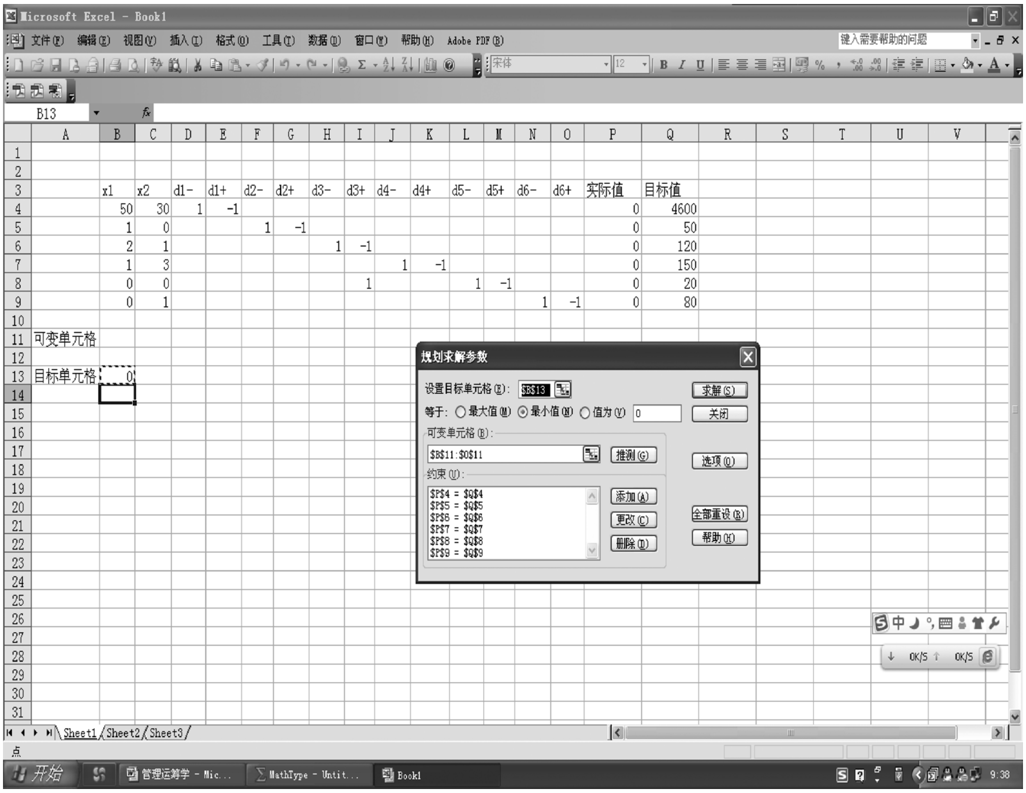


图 5-13

单击“选项”按钮，选中“采用线性模型”和“假定非负”，单击“确定”按钮，再单击“求解”按钮，得到如图 5-14 所示结果。

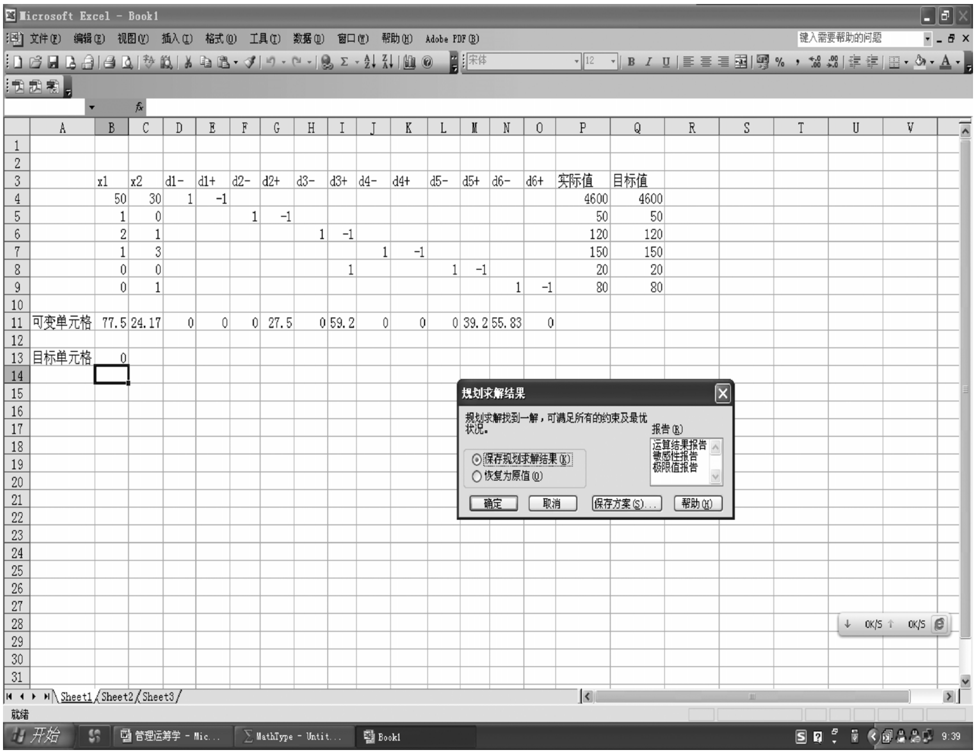


图 5-14

将值代入到目标函数和约束条件中，并删除在目标函数和约束条件中的 d_1^+，再改变目标单元格，即为 d_2^-，调整目标单元格，如图 5-15 所示。

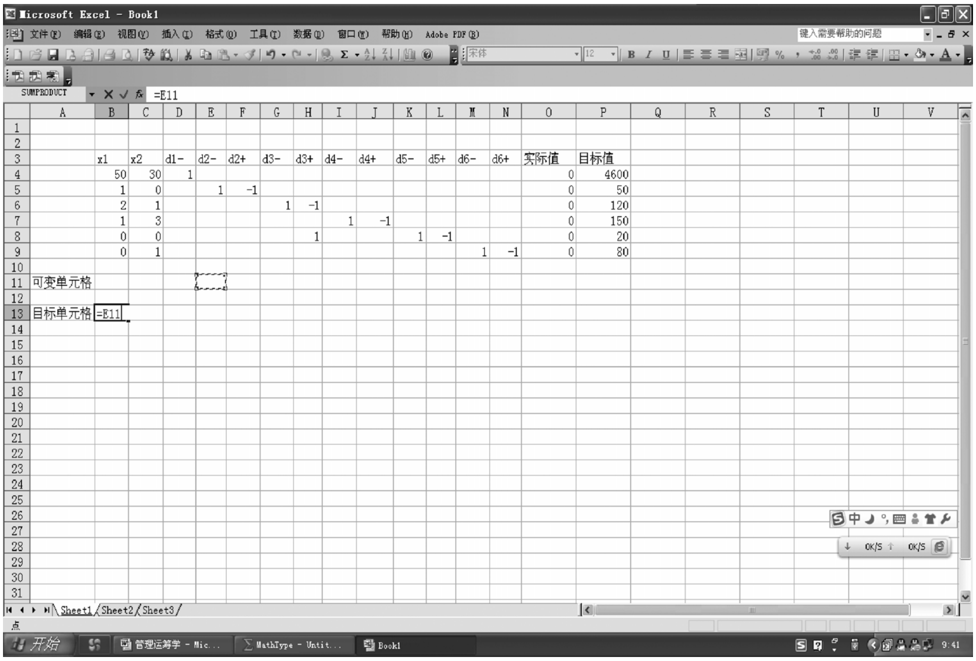


图 5-15

单击“工具”菜单中的“规划求解”命令项，如图 5-16 所示。

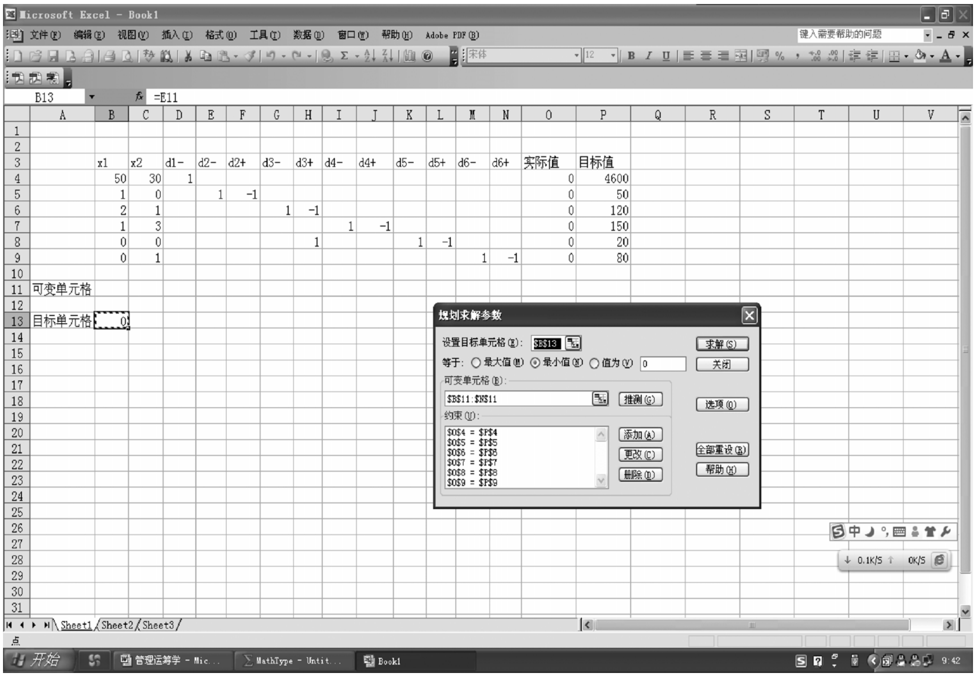


图 5-16

由于上步中已经输入了目标单元格、可变单元格和约束条件，只要目标单元格不改变，就不需要调整规划求解参数，直接单击“求解”按钮即可，结果如图 5-17 所示。

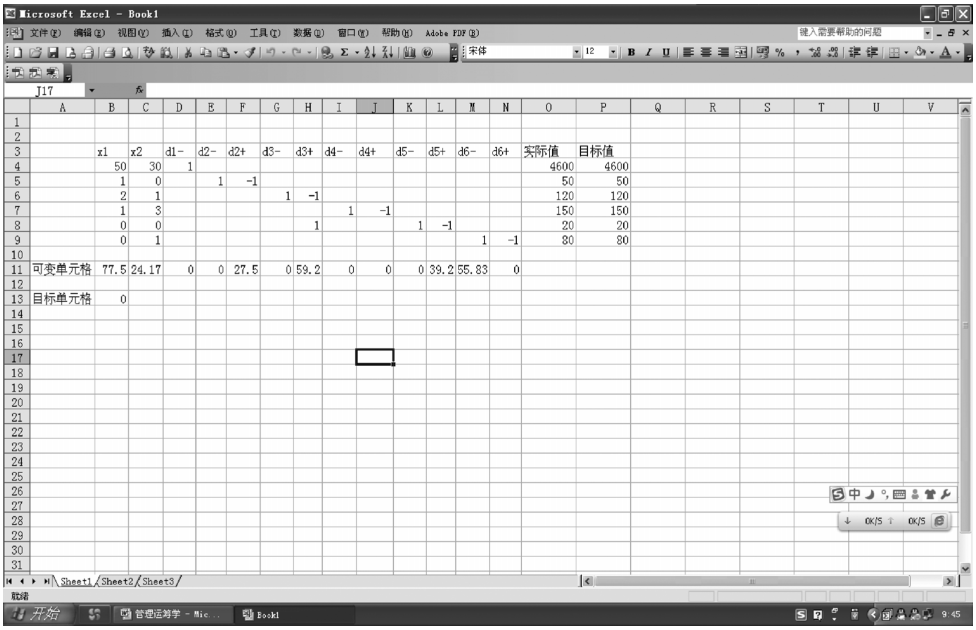
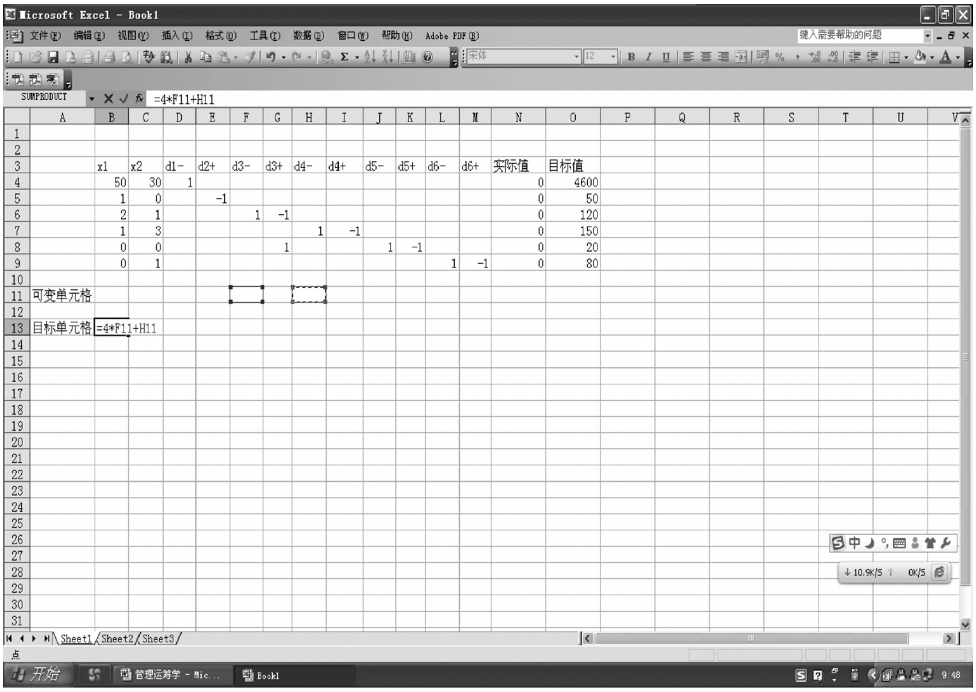


图 5-17

将 d_2^- 的值代入到目标函数和约束条件中，并删除目标函数和约束条件中的 d_2^- 。此时，修正目标单元格为 $4d_3^- + d_4^-$ ，如图 5-18 所示。

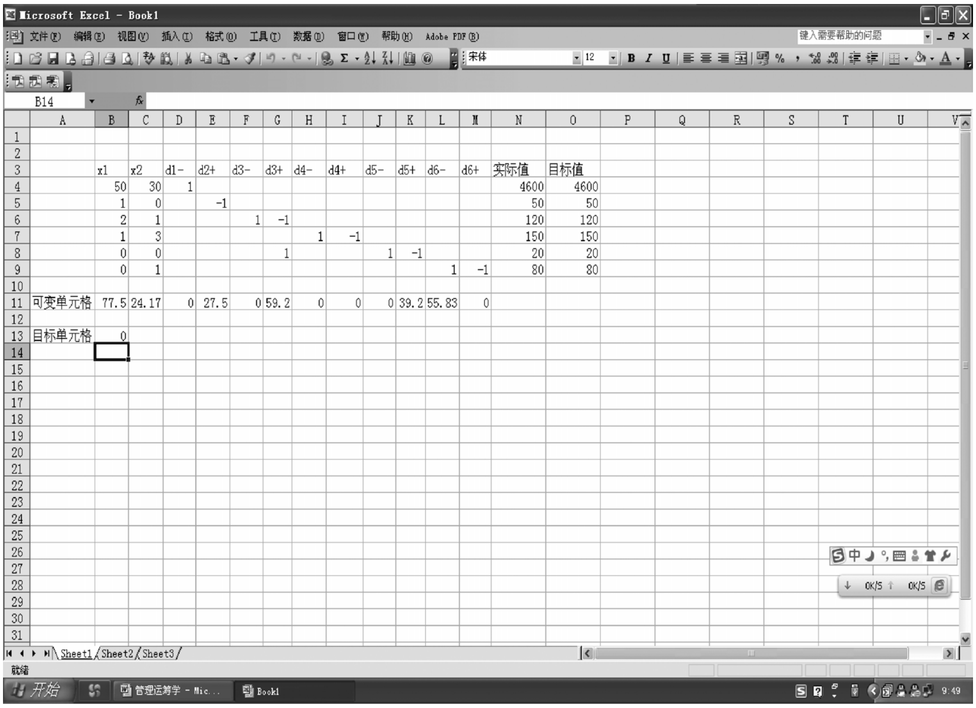


SUMPRODUCT　=4*F11+H11

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
3		x1	x2	d1-	d2+	d3-	d3+	d4-	d4+	d5-	d5+	d6-	d6+	实际值	目标值
4		50	30	1										0	4600
5		1	0		-1									0	50
6		2	1			1	-1							0	120
7		1	3					1	-1					0	150
8		0	0				1			1	-1			0	20
9		0	1									1	-1	0	80
11	可变单元格														
13	目标单元格	=4*F11+H11													

图 5-18

单击“工具”菜单的“规划求解”命令项，结果如图 5-19 所示。



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
3		x1	x2	d1-	d2+	d3-	d3+	d4-	d4+	d5-	d5+	d6-	d6+	实际值	目标值
4		50	30	1										4600	4600
5		1	0		-1									50	50
6		2	1			1	-1							120	120
7		1	3					1	-1					150	150
8		0	0				1			1	-1			20	20
9		0	1									1	-1	80	80
11	可变单元格	77.5	24.17	0	27.5	0	59.2	0	0	0	39.2	55.83	0		
13	目标单元格	0													

图 5-19

将 d_3^-，d_4^- 代入到目标函数和约束条件中，并删除目标函数和约束条件之中的 d_3^-，d_4^-，改变目标单元格为 d_5^+，如图 5-20 所示。

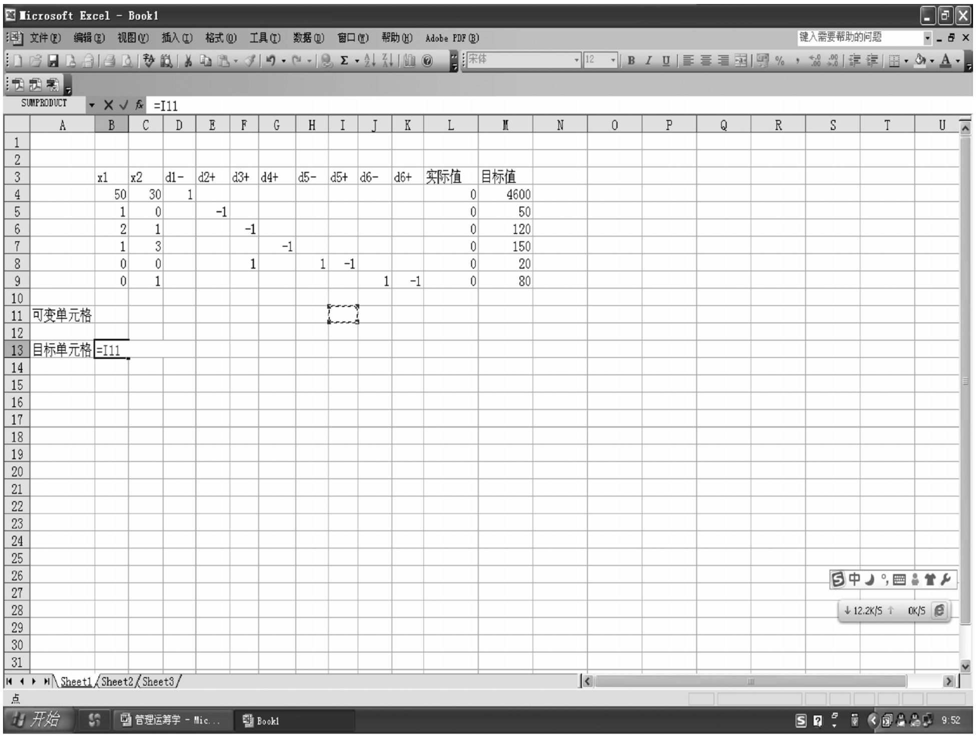


图 5-20

再次单击“工具”菜单的“规划求解”命令项，单击“求解”按钮，得到如图 5-21 所示结果。

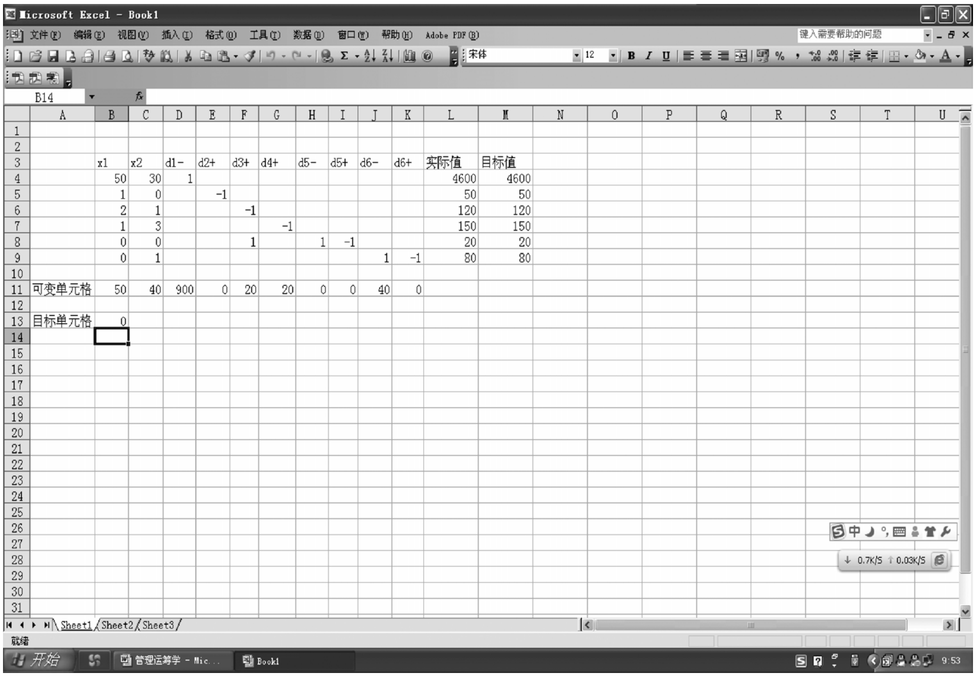
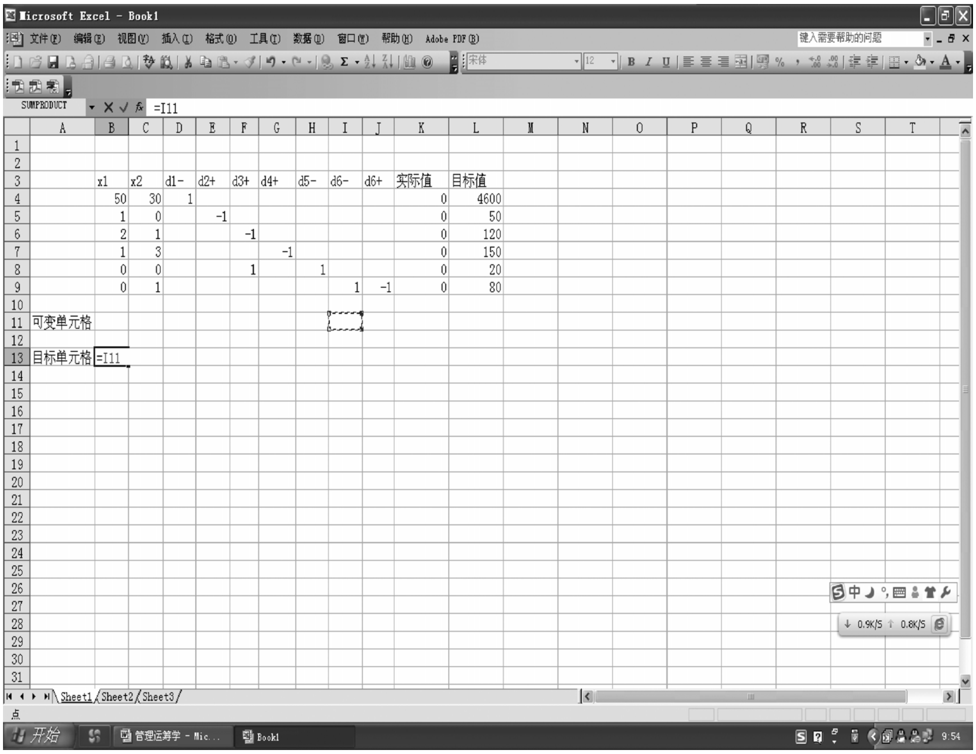


图 5-21

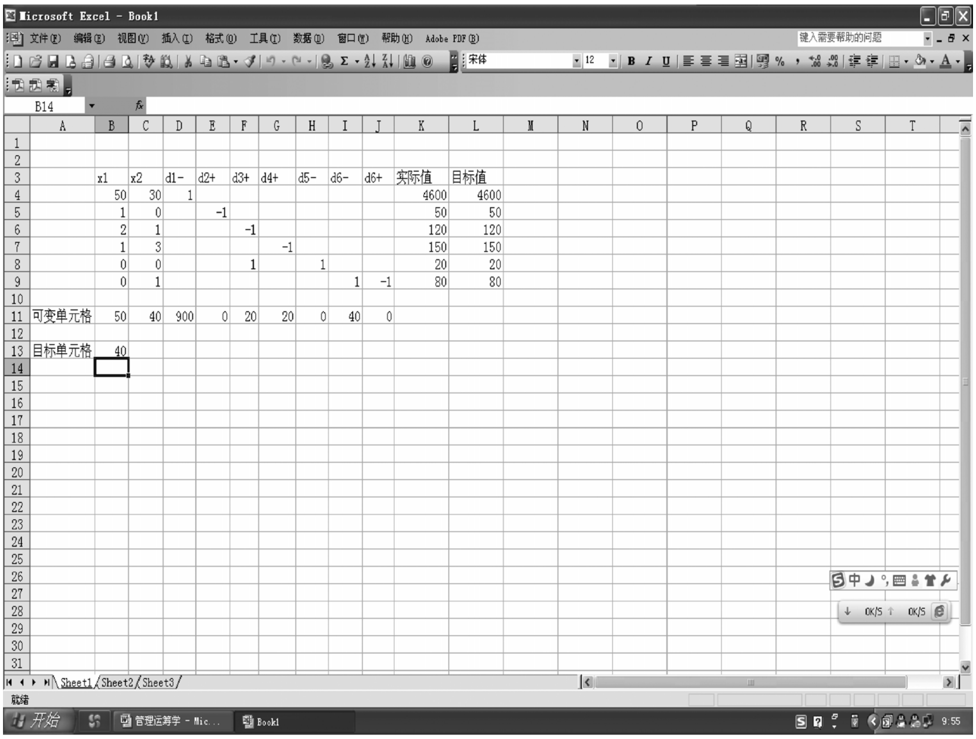
将 d_5^+ 代入到目标函数和约束条件中，并删除目标函数和约束条件中的 d_5^+ ，再次改变目标单元格为 d_6^- ，如图 5-22 所示。



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
3		x1	x2	d1-	d2+	d3+	d4+	d5-	d6-	d6+	实际值	目标值
4		50	30	1							0	4600
5		1	0		-1						0	50
6		2	1			-1					0	120
7		1	3				-1				0	150
8		0	0			1		1			0	20
9		0	1						1	-1	0	80
11	可变单元格											
13	目标单元格	=I11										

图 5-22

单击“工具”菜单“规划求解”命令项，单击“求解”按钮，结果如图 5-23 所示。



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
3		x1	x2	d1-	d2+	d3+	d4+	d5-	d6-	d6+	实际值	目标值
4		50	30	1							4600	4600
5		1	0		-1						50	50
6		2	1			-1					120	120
7		1	3				-1				150	150
8		0	0			1		1			20	20
9		0	1						1	-1	80	80
11	可变单元格	50	40	900	0	20	20	0	40	0		
13	目标单元格	40										

图 5-23

本例的满意解为 $x_1 = 50$，$x_2 = 40$ 。

练习题

1. 某工厂生产甲、乙两种产品。这两种产品都需要在 A、B、C 三种不同的设备上加工。每吨甲、乙产品在不同设备上加工所需的台时、它们销售后所能获得的利润值以及这三种加工设备在计划期内能提供的有限台时数列于表 5-12。试建立该问题目标规划模型。

表 5-12　有关参数表

设　备	每吨产品的加工台时		总有限台时
	甲	乙	
A	3	4	36
B	5	4	40
C	9	8	76
利润/(元/吨)	32	30	

该工厂的领导在安排生产计划时，将考虑以下三级目标。

第一级目标：根据市场信息，甲产品的销售量有下降的趋势，故考虑甲产品的产量不大于乙产品的产量。

第二级目标：尽可能充分利用各设备工时，但不希望加班。

第三级目标：尽可能达到并超过计划利润指标 300 元。

2. 某计算机制造厂生产 A、B、C 三种型号的计算机，它们在同一条生产线上装配，三种产品的工时消耗分别为 5 h、8 h、12 h。生产线上每月正常运转时间是 170 h。这三种产品的利润分别为每台 1000 元、1440 元、2520 元。该厂的经营目标如下。

第一级目标：充分利用现有设备工时，必要时可以加班。

第二级目标：A、B、C 的最低产量分别为 5 台、5 台、8 台，并依单位工时的利润比例确定权系数；

第三级目标：该厂的总利润不小于 20 000 元。

试建立该问题的目标规划模型。

3. 某厂拟生产甲、乙两种产品，每件利润分别为 20 元、30 元。这两种产品都要在 A、B、C、D 四种设备上加工，每件甲产品需占用各设备依次为 2、1、4、0 机时，每件乙产品需占用各设备依次为 2、2、0、4 机时，而这四种设备正常生产能力依次为每天 12、8、16、12 机时。此外，A、B 两种设备每天还可加班运行。试拟订一个满足下列目标的生产计划。

p_1：两种产品每天总利润不低于 120 元。

p_2：两种产品的产量尽可能均衡。

p_3：A、B 设备都应不超负荷，其中 A 设备能力还应充分利用(A 比 B 重要三倍)。

试建立该问题的目标规划模型。

4. 某彩色电视机厂生产 A、B、C 三种规格的电视机，装配工作在同一条生产线上完成，三种产品装配时候的工时消耗分别为 6 h、8 h、10 h，生产线每月的正常工作时间为 200 h，三种规格的电视机销售获得的利润分别为 500 元、650 元、800 元，每月销量预计为 12 台、10 台、6 台，该厂的经营目标如下。

p_1：利润指标为每月 16 000 元。

p_2：充分利用生产能力。

p_3：加班时间不超过 24 h。

p_4：产量以预计销量为准。

为确定生产计划，试建立该问题的目标规划模型。

5. 一个小型的无线电广播台考虑如何最好地安排音乐、新闻和商业节目。依据法律，每天允许广播 12 h。其中，商业节目用以盈利，每分钟可以收入 250 美元；新闻节目每分钟需要支出 40 美元；音乐节目每分钟需要费用为 17.5 美元。法律规定，正常情况下的商业节目只能占广播节目时间的 20%，每小时至少安排 5 min 的新闻节目。优先级别如下。

p_1：满足法律规定的要求。

p_2：每天的纯收入最大。

试建立该问题的目标规划模型。

6. 分别用图解法和单纯形法求解下列目标规划：

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2 d_3^+ + P_3 d_2^+$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + d_1^- - d_1^+ = 4 \\ x_1 - 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 4 \\ x_1 + 2x_2 + d_3^- - d_3^+ = 8 \\ x_1,\ x_2,\ d_1^-,\ d_2^-,\ d_3^-,\ d_4^-,\ d_1^+,\ d_2^+ \geqslant 0 \end{cases}$$

7. 分别用图解法和单纯形法求解下列目标规划。

$$\min z = P_1(d_1^- + d_1^+) + P_2(d_2^- + d_2^+)$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 18 \\ 3x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 18 \\ x_1,\ x_2,\ d_1^-,\ d_2^- \geqslant 0 \end{cases}$$

第6章　整数规划

本章概要

学习目标　学完本章后，你将能够：

1. 运用整数规划算法求解整数规划问题。
2. 解决 0-1 规划问题。
3. 运用匈牙利算法解决指派问题。

整数规划问题的例子

某公司考虑在北京、上海、广州和武汉四个城市设立库房。这些库房负责向华北、华中和华南三个地区发运货物，每个库房每月可处理货物1000件。在北京设库房每月的成本为4.5万元，上海为5万元，广州为7万元，武汉为4万元。每个地区的月平均需求量：华北600件，华中700件，华南800件。发运货物的费用见表6-1。

表6-1　发运货物费用表　　（单位：元/件）

	华北	华中	华南
北京	200	400	500
上海	300	250	450
广州	600	400	250
武汉	300	150	350

公司希望在满足地区需要的前提下使平均月成本最小，且还要满足以下条件：

(1)如果在上海设立库房，则必须在武汉也设库房。

(2)最多设立两个库房。

(3)武汉和广州不能同时设立库房。

请建立一个满足上述要求的整数规划模型。

6.1　整数规划问题的求解

在前述的线性规划模型中，没有考虑到解为整数的条件。在现实生活中，很多问题的最优解必须为整数，因此单纯形法获得的最优解未必是整数规划问题的最优解。本节将重点讨论整数规划问题的最优解求解算法。

6.1.1　分枝定界法

在很多线性规划模型中，常常要求解必须是整数。例如，所求解是机器的台数、完成工作的人数或装货的车数等。依据单纯形法所获得的最优解进行四舍五入得到的解并不一定是可行解，或虽然是可行解但未必是最优解。求最优整数解的问题整数规划(integer programming)，简称IP。

整数规划中如果所有的变量都限制为(非负)整数，就称为纯整数规划(pure integer programming)或称为全整数规划(all integer programming)；如果仅一部分变量限制为整数，则称为混合整数计划(mixed integer programming)。

【例6-1】(生产计划)某厂拟购进甲、乙两类机床生产新产品。已知甲、乙机床进价分别为2万元和3万元；安装占地面分别为4 m^2 和2 m^2；投后的收益分别为300元/天和200元/天。厂方仅有资金14万元、安装面积18 m^2，为使收益最大，厂方应购进甲、乙机床各多少台？

【解】假设购进甲、乙机床分别为x_1、x_2台，于是该问题的线性规划模型为

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t}: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 14 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ x_1, x_2 \geqslant 0(\text{为整数}) \end{cases}$$

对该模型采用图解法求解，得到图6-1。

显然，图解法得到的最优解 h 点并不是整数规划问题的最优解，需要寻求其他解法。

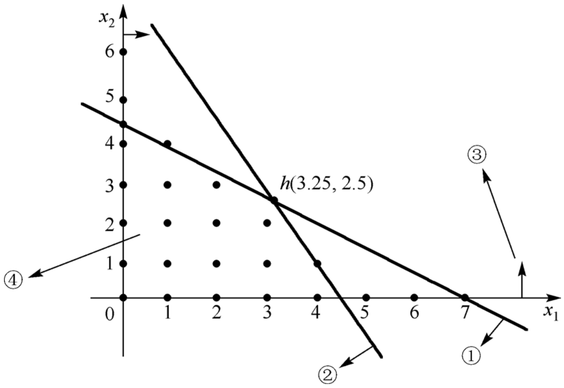


图6-1　图解法结果

为了获得有效的整数解，下面介绍运用分枝定界法的基本步骤：

(1)任意寻找一个整数可行解，算出其目标函数值，以这个值为目标函数最优值的下界 $\underline{z}$ 。

(2)解该整数规划对应的线形规划问题，如果无解，则原整数规划问题也无解；如果最优解满足整数条件，则这个解就是原整数规划问题的最优解；如果最优解不满足整数条件，则转至步骤(3)，此时的最优目标函数值为现时的一个上界 $\bar{z}$ ，最优函数值满足 $\underline{z} \leqslant z^* \leqslant \bar{z}$ 。

(3)将整数规划问题分解为子问题，即进行“分枝”，在松弛问题最优解的非整数分量中选一个分量进行分解。

(4)求解上述子问题的松弛问题(不考虑整数条件)，如果无解说明该子问题已经查明；如果得出整数最优解，该子问题已经查明，不再继续分枝。此时，将得到一个下界，和原来的下界比较，若比原来的下界大，以它为新的下界。它又是这个分枝目标函数最优解的一个上界，若它比原问题此时的上界小，且在各平行分枝中提供的上界中最大，以它为新的上界。

(5)得出非整数最优解，若其目标函数值小于原来问题最优目标函数值现时的下界，表明该子问题不可能含有原问题的最优解，再向下分枝是不必要的，因而认为其子问题已查明(剪枝)。若其目标函数大于现时的下界，返回步骤(3)继续进行分枝。

(6)继续进行分枝、求解松弛问题、修改上下界和剪枝，当求出的目标函数最优值的上界等于下界时，即达到了最优解，计算结束。

【例6-2】求解【例6-1】的最优解。

【解】按照图解法，得到的最优解为 $x_1 = 3.25$ ，$x_2 = 2.5$ 。

(1)对 x_1 进行分枝，分解为 $x_1 \leqslant 3$ ，$x_1 \geqslant 4$ 。于是构建如下线性规划模型：

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t}: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 14 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ x_1 \leqslant 3 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{6-1}$$

得到的最优解为 $x_1 = 3$ ，$x_2 = 8/3$ 。

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}2x_1 + 3x_2 \leqslant 14 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ x_1 \geqslant 4 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0\end{cases} \tag{6-2}$$

得到的最优解为 $x_1 = 4$，$x_2 = 1$，最优值为14。已经获得整数解，不需要再进行分枝。

(2)对模型(6－1)解的结果 x_2 进行分枝，表示为 $x_2 \leqslant 2$，$x_2 \geqslant 3$，于是有

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}2x_1 + 3x_2 \leqslant 14 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ x_1 \leqslant 3 \\ x_2 \leqslant 2 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

其最优解为 $x_1 = 3$，$x_2 = 2$，最优值为13，小于14，于是删除，得到

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}2x_1 + 3x_2 \leqslant 14 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ x_1 \leqslant 3 \\ x_2 \geqslant 3 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

其最优解为 $x_1 = 2.5$，$x_2 = 3$，删除。于是获得整数规划问题的最优解 $x_1 = 4$，$x_2 = 1$。

不同的搜索策略会产生不同的搜索树。一般情况下，同一层的两个子问题，先搜索目标函数比较大的较有利(如果是极小问题，则应先搜索目标函数值小的较为有利)，这样可能得到数值比较大的下界，下界越大被剪去的分枝越多。

分枝定界算法对于混合整数规划特别有效，对没有整数要求的变量就不必分枝，这将大大减少分枝的数量。

【例6-3】求解下列线性规划模型的最优解：

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}4x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 8 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0，\text{为整数}\end{cases}$$

【解】放弃 x_1、x_2 为整数的要求，得到一般的松弛问题，用单纯形法求解，得到最优解为 $x_1 = 2.2$，$x_2 = 1.2$。最优目标值为 $z_0 = 12.4$，从而原问题的最优目标值上界为12.4。

由于上述最优解不是整数，需要利用分解手段把原问题分解成子问题之和。此时，可以任选 x_1，x_2 进行分枝。假定对 x_2 进行分枝，则将原问题分解为如下两个问题：

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}4x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 8 \\ x_2 \leqslant 1 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0\end{cases} \tag{6-3}$$

最优解为 $x_1 = 2.25$，$x_2 = 1$，目标函数值为 12。

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$
$$\text{s.t}: \begin{cases} 4x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 8 \\ x_2 \geqslant 2 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

最优解为 $x_1 = 1$，$x_2 = 2$，最优值为 10。将其作为新的下界，12 作为新的上界。

模型（6-3）中还需要对 x_1 进行分枝，即

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$
$$\text{s.t}: \begin{cases} 4x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 8 \\ x_2 \leqslant 1 \\ x_1 \leqslant 2 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

最优解为 $x_1 = 2$，$x_2 = 1$，最优值为 11。由于 $11 > 10$，故目标函数值的下界应修改为 11。

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$
$$\text{s.t}: \begin{cases} 4x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 8 \\ x_2 \leqslant 1 \\ x_1 \geqslant 2 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

此线性规划模型无解。

由于线性规划模型的分枝已经完全列举，故最优解为 $x_1 = 2$，$x_2 = 1$。

6.1.2 割平面法

首先不考虑变量为整数这一约束条件，但增加线性约束条件（割平面），将原可行域切割掉一部分，这部分仅仅包含非整数解，整数解没有被切割掉。这种方法就是这样找到适当的割平面（不见得一次就能找到），使得切割后有这样一个可行域，有一个有整数的坐标正好是问题的最优解。割平面方法的提出者为 Gomory，也称 Gomory 割平面法。

1958 年，该方法提出后，一直引起了人们的注意，但完全用这种方法解题仍然很少，主要是收敛很慢，需要与其他方法相互结合。

求出某一个线性规划模型切割方程的步骤如下：

（1）令 x_i 为线性规划最优解中分数值的一个基变量，由单纯形表得到 $x_i + \sum_k a_{ik}x_k = b_i$。

（2）b_i 和 a_{ik} 分解为整数部分 N 和非负真分数 f 的和，即 $b_i = N_i + f_i$，$a_{ik} = N_{ik} + f_{ik}$，N_i 是不超过 b_i 的最大整数。于是有

$$x_i + \sum_k a_{ik}x_k = b_i \Rightarrow x_i + \sum_k N_{ik}x_k - N_i = f_i - \sum_k f_{ik}x_k$$

(3)由于 x_i、x_k 为非负整数，左边必须是整数，右边 $0 < f_i < 1$，所以 $f_i - \sum_k f_{ik} x_k \leqslant 0$，此即为切割方程。

【例 6-4】求解下列线性规划模型的最优解：

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\text{s. t：}\begin{cases} -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \\ x_1,\ x_2 \text{ 为整数} \end{cases}$$

【解】用单纯形法求解，见表 6-2。

表 6-2　单 纯 形 表

c_j			1	1	0	0	θ_i
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	1	−1	1	1	0	−
0	x_4	4	3	1	0	1	4/3
$c_j - z_j$		0	1	1	0	0	
0	x_3	7/3	0	4/3	1	1/3	7/4
1	x_1	4/3	1	1/3	0	1/3	4
$c_j - z_j$		7/3	0	2/3	0	−1/3	
1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4	
1	x_1	3/4	1	0	−1/4	1/4	
$c_j - z_j$		5/2	0	0	−1/2	−1/2	

于是，约束条件可以变更为

$$x_2 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{7}{4},\ x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{4}$$

按照切割方程的步骤进行化简，有

$$x_2 - 1 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4\right),\ x_1 - x_3 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4\right)$$

于是，$\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4\right) \leqslant 0$ 即为切割方程，加入原有的约束条件中，解出其结果为 $x_1 = 1$，$x_2 = 1$。

6.2　整数规划问题的应用

整数规划的应用非常广泛，如上述的纯整数规划、混合整数规划等等。0-1 规划及指派问题是应用最广泛的整数规划问题。

6.2.1　0-1 规划问题

应用最广泛的整数规划问题是各种类型的决策问题，决策者希望模型能回答诸如是否要执行某些项目(或某些活动)，在什么时候或什么地点执行等决策问题，回答这类“是-否”或“有-无”问题可借助整数规划中的 0-1 整数变量。

0-1 整数变量只有两个选择，0 由于它在数学上的特性可以很好地代表“无”或“否”，而 1 则可以很好地代表“有”或“是”。0-1 变量由于它的特殊性也被称为二进制变量、决策变量或逻辑变量。

0-1 变量的主要作用体现在：

(1) $x_j = 1$ 表示方案 j 被选中，否则 $x_j = 0$ 表示方案 j 未被选中。

(2) 从 n 个方案之中必须选择一个，则 $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$ 。

(3) 从 n 个方案之中最多选择 m 个，则 $\sum_{j=1}^{n} x_j \leqslant m$ 。

(4) 方案 i 只有在方案 j 被选中时，才可能被选中，即 $x_i \leqslant x_j$ 。

(5) 方案 i 和方案 j 是否选中是同时的，即 $x_i = x_j$ 。

【例 6-5】(投资问题)某公司有五个项目被列入投资计划，各项目的投资额和期望的投资收益见表 6-3。

表 6-3　投资和期望收益表　　（单位：万元）

项目	投资额	投资收益
1	210	150
2	300	210
3	100	60
4	130	80
5	260	180

该公司只有 600 万元资金可用于投资，由于技术上的原因，投资受到以下约束：

(1) 在项目 1、2 和 3 中必须有一项被选中。

(2) 项目 3 和 4 只能选一项。

(3) 项目 5 被选中的前提是项目 1 必须被选中。

如何在上述条件下选择一个最好的投资方案，使投资收益最大?

【解】假设 $x_j = 1$ 表示方案 j 被选中，否则 $x_j = 0$ 表示方案 j 未被选中，$j = 1, 2, 3, 4, 5$。于是，该问题的整数规划模型可以设计为

$$\max z = 150x_1 + 210x_2 + 60x_3 + 80x_4 + 180x_5$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} 210x_1 + 300x_2 + 100x_3 + 130x_4 + 260x_5 \leqslant 600 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_5 \geqslant 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 1, 0 \end{cases}$$

【例 6-6】(背包问题)登山队员做登山准备，需要携带的物品有：食品、氧气、冰镐、绳索、帐篷、照相器材和通信设备，每种物品的重要系数和质量见表 6-4。假定登山队员可携带的最大质量为 25 kg，他应如何抉择?

【解】设 $x_i = 1$ 表示登山队员携带物品 i ，$x_i = 0$ 表示登山队员不携带物品 i 。于是，该问题的整数规划模型可以设计为

表 6-4　登山队员所带物品参数表

序号	1	2	3	4	5	6	7
物品	食品	氧气	冰镐	绳索	帐篷	照相器材	通信设备
质量/kg	5	5	2	6	12	2	4
重要系数	20	15	18	14	8	4	10

$$\max z = 20x_1 + 15x_2 + 18x_3 + 14x_4 + 8x_5 + 4x_6 + 10x_7$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 12x_5 + 2x_6 + 4x_7 \leqslant 25 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 = 1, 0 \end{cases}$$

集合覆盖问题也是典型的整数规划问题。一个给定集合（集合一）的每一个元素必须被另一个集合（集合二）的元素所覆盖。在满足覆盖集合一所有元素的前提下，集合覆盖问题的目标是使需要的集合二的元素最少，又称布点问题，常被用于一些公共设施，如学校、医院、商业区、消防队等设施的布点，解决如何既满足公共要求又使布的点最少，以节约投资费用。

【例 6-7】（布点问题）解决某市消防站的布点问题。某城市共有六个区，每个都可以建消防站。市政府希望建设的消防站最少，但必须满足在城市任何地区发生火警时，消防车要在 15 min 内赶到现场。据实地测定，各区之间消防车行驶的时间见表 6-5，请帮助该市制定一个最节省资金的计划。

表 6-5　各地区消防车行驶时间表　（单位：min）

	地区 1	地区 2	地区 3	地区 4	地区 5	地区 6
地区 1	0	10	16	28	27	20
地区 2	10	0	24	32	17	10
地区 3	16	24	0	12	27	21
地区 4	28	32	12	0	15	25
地区 5	27	17	27	15	0	14
地区 6	20	10	21	25	14	0

【解】设 $x_i = 1$ 表示设消防站，$x_i = 0$ 表示不设消防站。于是有

$$\min z = \sum_{i=1}^{6} x_i$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_1 + x_2 + x_6 \geqslant 1 \\ x_3 + x_4 \geqslant 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 \geqslant 1 \\ x_4 + x_5 + x_6 \geqslant 1 \\ x_2 + x_5 + x_6 \geqslant 1 \\ x_1 \sim x_6 = 1, 0 \end{cases}$$

【例 6-8】（固定费用问题）红光服装厂可生产三种服装：西服、衬衫和羽绒服。生产不同种类的服装要使用不同的设备，可从专业租赁公司租用这些设备，设备租金和其他经济参数见表 6-6。

表 6-6　相关参数表

序号	服装种类	设备租金/元	生产成本/（元/件）	销售价格/（元/件）	人工工时/（h/件）	设备工时/（h/件）	设备可用工时/h
1	西服	5000	280	400	5	3	300
2	衬衫	2000	30	40	1	0.5	300
3	羽绒服	3000	200	300	4	2	300

假定市场需求不成问题，服装厂每月可用人工工时为 2000 h，该厂如何安排生产可使每月的利润最大?

【解】设表示租赁设备，$x_i=1$ 表示租赁设备 i，否则 $x_i=0$ 表示租赁设备 i。令 y_j 表示各类服装的生产量。如果 $y_j>0$，则 $x_i=1$；否则 $y_j=0$，则 $x_i=0$。于是有

$$\max z = 120y_1 + 10y_2 + 100y_3 - 5000x_1 - 2000x_2 - 1000x_3$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}5y_1 + y_2 + 4y_3 \leqslant 2000 \\ 3y_1 \leqslant 300x_1 \\ 0.5y_2 \leqslant 300x_2 \\ 2y_3 \leqslant 300x_3 \\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geqslant 0(\text{为整数})；x_1,\ x_2,\ x_3 = 1,\ 0\end{cases}$$

解 0-1 型整数规划最简单的方法就是穷举法，即检查变量取值为 0 或 1 的每一种组合，比较目标函数值以求得最优解，这就需要检查变量取值的 2^n 个组合，如果变量个数 n 较大，则组合的数量较大。

【例 6-9】求下列规划问题的解：

$$\max z = 2x_1 + x_2 - x_3$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}x_1 + 3x_2 + x_3 \leqslant 2 \\ 4x_2 + x_3 \leqslant 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 \leqslant 4 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 = 1,\ 0\end{cases}$$

【解】有三个变量、八种组合，具体见表 6-7。

表 6-7　组合结果表

0, 0, 0	0	0	0	0	0
0, 0, 1	1	1	−1	−1	−1
0, 1, 0	3	4	2	4	1
0, 1, 1	4	5	1	3	0
1, 0, 0	1	0	1	1	2
1, 0, 1	2	1	0	0	1
1, 1, 0	4	4	3	5	3
1, 1, 1	5	5	2	4	2

0，1，0；0，1，1；1，1，0；1，1，1 这四种情形不满足可行域要求，最优解为 $x_1=1$，$x_2=0$，$x_3=0$。

隐枚举法(implicit enumeration)是检查变量取值组合的一部分(而不是全部)就能求得问题最优解的方法。其基本思路是，先找到一组可行解，然后改进目标值，直到不能改进为止。具体的求解步骤可以描述如下：

(1)试探找到一个可行解，算出其目标函数值，令它为初始过滤值。

(2)对目标函数进行变形，使得各变量的系数按递增的顺序，对目标函数和约束不等式中的变量重新排列。

(3)考察各变量的可能组合，若产生的目标函数值劣于此时的过滤值，则不予考虑；反之令它为更好的可行解，并以它的目标函数值为新的过滤值。

(4)重复步骤(3)，一直到不能再改进目标函数值为止，最后的过滤值就是最优目标函数值，对应的可行解就是最优解。

【例 6-10】求下列规划问题的解：

$$\max z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 2 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 4 \\ x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ 4x_2 + x_3 \leqslant 6 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 = 1,\ 0 \end{cases}$$

【解】首先试探找到一个可行解，算出其目标函数值，令它为初始过滤值。显然，(0，0，0)是一个可行解，相应的目标函数值 $z = 0$ 可以作为初始过滤值。

接着，对目标函数进行变形，使得各变量的系数按递增的顺序，对目标函数和约束不等式中的变量重新排列，即

$$\max z = -2x_2 + 3x_1 + 5x_3$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} 2x_2 + x_1 - x_3 \leqslant 2 \\ 4x_2 + x_1 + x_3 \leqslant 4 \\ x_2 + x_1 \leqslant 3 \\ 4x_2 + x_3 \leqslant 6 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 = 1,\ 0 \end{cases}$$

按表 6-8 考察各变量的可能组合，若产生的目标函数值劣于此时的过滤值，则不予考虑；反之以它为更好的可行解，并以它的目标函数值为新的过滤值。

表 6-8　重新组合结果表

x_2，x_1，x_3	约束 1	约束 2	约束 3	约束 4	z
0，0，0	√	√	√	√	0
0，0，1	√	√	√	√	5
0，1，0	–	–	–	–	3
0，1，1	√	√	√	√	8
1，0，0	–	–	–	–	–2
1，0，1	–	–	–	–	
1，1，0	–	–	–	–	
1，1，1	–	–	–	–	

6.2.2 指派问题

某问题需完成 n 项任务，恰好有 n 个人可承担这些任务。由于每人的专长不同，各人完成任务不同(或所费时间)，效率也不同。指派哪个人去完成哪项任务，使得完成 n 项任务的总效率最高(或所需总时间最小)，这类问题称为指派问题或分派问题。

类似问题有：有 n 项加工任务，怎样指派到 n 台机床分别完成的问题；有 n 条航线，怎样指定 n 艘船去航行问题。

对应每个人指派问题，假定第 i 个人 A_i 去做第 j 项任务 B_j 的工作效率为 c_{ij} ，问如何安排可使得总工作效率最高。

如果第 i 个人 A_i 去做第 j 项任务 B_j ，则 $x_{ij}=1$ ，如果第 i 个人 A_i 不去做第 j 项任务 B_j 时，$x_{ij}=0$ 。于是，其线性规划模型为

$$\min z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1(i=1,\cdots,n)\\ \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1(j=1,\cdots,n)\\ x_{ij}=0,1(i,j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

库恩于 1955 年提出了指派问题的解法，引用匈牙利数学家康尼格一个关于矩阵中 0 元素的定理：系数矩阵中独立 0 元素的最多个数等于能覆盖所有 0 元素的最小直线数。

匈牙利法的主要步骤如下。

第一步：变换效率矩阵，使在各行各列都出现零元素。

(1) 从矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的每行元素减去该行的最小元素。

(2) 再从所得矩阵的每列中减去该列最小元素。

如果某行某列已经存在 0 元素，则不用再减了。

第二步：进行指派，获得最优解。

(1) 从只有一个 0 的行(列)开始，给这个 0 加上圈，划去圈所在的列或者行的其他 0 元素，记作 ϕ ；从只有一个 0 的列(行)开始，给这个 0 加上圈，划去圈所在的列或者行的其他 0 元素，记作 ϕ 。重复这两步，直到所有的 0 都没有圈出或划去为止。

(2) 如果仍然还有没划圈的 0 元素，且同行(列)的 0 元素至少有两个，则需要继续试探。从剩有 0 元素的最小行(列)开始，比较这行各 0 元素所在列中 0 元素的数目，选择 0 元素少的那一列的这个 0 元素加圈，然后划掉同行或者同列的其他 0 元素。反复进行，直到所有 0 被圈出或者划掉为止。

如果划圈的数目正好等于矩阵的阶数，表示得到最优解；如果不是，进行下一步。

第三步：作最少的直线覆盖所有的 0 元素，以确定该系数矩阵中能找到最多的独立元素数。按照下列步骤进行：

(1) 对没划圈的行打√，对已打√的行中所含 ϕ 元素的列打√，再对打√的列中含圈的元素的行打√。重复上述步骤，直到打不出新的√行及列为止。

(2) 对没打√的行画横线，对打√的列画纵线，即得到了覆盖所有 0 元素的最小直线数。

如果直线数小于矩阵的行数，则转入下一步；否则回到第二步的(2)。

第四步：增加 0 元素。在第三步没有直线覆盖的元素中找出最小元素，打√的行中各元素都减去这个最小元素，打√的列都加上这个最小元素，再求解。

如果求极大化的指派问题，则需要对指派矩阵进行变换，如令 $b_{ij}=m-c_{ij}$，其中 m 为足够大的常数，可以选择 $\max\limits_{i,j} c_{ij}$。接着对变换后的矩阵按照上述求解算法求解即可。

【例 6-11】(人员安排)五名运动员各种泳姿的成绩(各为 50 m)见表 6-9。试问如何从中选拔一个参加 200 m 混合泳接力队，可使得预期的比赛成绩最好?

表 6-9　游泳成绩表　(单位：s)

	赵	钱	张	王	周
仰泳	37.7	32.9	33.8	37.0	35.4
蛙泳	43.4	33.1	42.2	34.7	41.8
蝶泳	33.3	28.5	38.9	30.4	33.6
自由泳	29.2	26.4	29.6	28.5	31.1

【解】变换效率矩阵，见表 6-10。

表 6-10　效 率 矩 阵　(单位：s)

	赵	钱	张	王	周
仰泳	2	0	0	2.5	0
蛙泳	7.5	0	8.2	0	6.2
蝶泳	2	0	9.5	0.3	2.6
自由泳	0	0	2.3	0.5	2.2

按照只有一个 0 的行(列)开始，进行指派，见表 6-11。

表 6-11　第一次指派表　(单位：s)

	赵	钱	张	王	周
仰泳	2	ϕ	◎	2.5	ϕ
蛙泳	7.5	ϕ	8.2	◎	6.2
蝶泳	2	◎	9.5	0.3	2.6
自由泳	◎	ϕ	2.3	0.5	2.2

【例 6-12】(物流管理)假定五艘轮船停靠五个码头的时间如表 6-12 所示，问各个轮船停靠何种码头，可使得总的停靠时间最短?

表 6-12　停靠时间表

	A	B	C	D	E
1	8	10	9	3	6
2	7	8	11	2	9
3	2	4	6	4	4
4	7	7	5	2	7
5	10	8	10	3	11

【解】第一步，求出效率矩阵，见表 6-13。

表 6-13　效率矩阵表

	A	B	C	D	E
1	5	5	3	◎	1
2	5	4	6	ϕ	5
3	◎	ϕ	1	2	ϕ
4	5	3	◎	ϕ	3
5	7	3	4	ϕ	6

由于划圈的数目为 3,因此需要进行变换,结果见表 6-14。

表 6-14　变换表 1

	A	B	C	D	E	
1	5	5	3	◎	1	√
2	5	4	6	ϕ	5	√
3	◎	ϕ	1	2	ϕ	
4	5	3	◎	ϕ	3	
5	7	3	4	ϕ	6	√
				√		

于是，按照第三步的基本做法，并增加 0 元素，见表 6-15。

表 6-15　变换表 2

	A	B	C	D	E
1	4	4	2	ϕ	◎
2	4	3	5	◎	4
3	◎	ϕ	1	3	ϕ
4	5	3	◎	ϕ	3
5	6	2	3	ϕ	5

此时，画圈的行为 4，仍然需要继续变换，变换表见表 6-16。

表 6-16　变换表 3

	A	B	C	D	E	
1	4	4	2	ϕ	◎	
2	4	3	5	◎	4	√
3	◎	ϕ	1	3	ϕ	
4	5	3	◎	ϕ	3	
5	6	2	3	ϕ	5	√
				√		

于是得到表 6-17。

表 6-17　变换表 4

	A	B	C	D	E
1	4	4	2	ϕ	◎
2	2	1	3	◎	2
3	◎	ϕ	1	5	ϕ
4	5	3	◎	ϕ	3
5	4	◎	1	ϕ	3

此时，画圈的个数正好等于行的个数，即获得最优解。

本章要点

在规划模型中，很多变量常常要取常数。为了获得整数解，本章介绍了分枝定界法和割平面法。读者需要掌握和了解两类方法的核心思想和具体步骤。

0-1 问题和指派问题较为类似。本章也给出了其建模的步骤，读者应掌握 0-1 规划的求解思路，对匈牙利算法的实施步骤有充分的了解。

关键公式

● b_i 和 a_{ik} 分解为整数部分 N 和非负真分数 f 的和，即 $b_i = N_i + f_i$，$a_{ik} = N_{ik} + f_{ik}$，N_i 是不超过 b_i 的最大整数。于是有

$$x_i + \sum_k a_{ik}x_k = b_i \Rightarrow x_i + \sum_k N_{ik}x_k - N_i = f_i - \sum_k f_{ik}x_k$$

● 如果第 i 个人 A_i 去做第 j 项任务 B_j，则 $x_{ij} = 1$；如果第 i 个人 A_i 不去做第 j 项任务 B_j 时，$x_{ij} = 0$。其线性规划模型为

$$\min z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & (i = 1, \cdots, n)\\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & (j = 1, \cdots, n)\\ x_{ij} = 0, 1 & (i, j = 1, \cdots, n)\end{cases}$$

案例解析

针对本章一开始提供的案例，按照 0-1 规划建模的基本思想，假设每个月从仓库 i 到仓库 j 的运送货物数量为 x_{ij}，$y_i = 1$ 表示在 A_i 设立仓库，否则 $y_i = 0$ 表示不设。于是，其线性规划模型可以表示为

$$\begin{aligned}\min z =\ & 200x_{11} + 400x_{12} + 500x_{13} + 300x_{21} + 250x_{22} + 450x_{23} + 600x_{31} + 400x_{32} + 250x_{33}\\ & + 300x_{41} + 150x_{42} + 350x_{43} + 45000y_1 + 50000y_2 + 70000y_3 + 400004_4\end{aligned}$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}x_{11} + x_{12} + x_{13} \leqslant 1000y_1\\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leqslant 1000y_2\\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \leqslant 1000y_3\\ x_{41} + x_{42} + x_{43} \leqslant 1000y_4\\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \geqslant 600\\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \geqslant 700\\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \geqslant 800\\ y_2 - y_4 \leqslant 0\\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leqslant 2\\ y_3 + y_4 \leqslant 1\\ x_{ij} \geqslant 0,\ y_i = 1, 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)\end{cases}$$

练习题

1. 求下列整数规划问题的最优解：

（1）
$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\text{s.t}\begin{cases}2x_1 + 3x_2 \leqslant 14.5\\4x_1 + x_2 \leqslant 16.5\\x_1,\ x_2 \geqslant 0\\x_1,\ x_2\ \text{为整数}\end{cases};$$

（2）
$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\text{s.t}\begin{cases}2x_1 + 3x_2 \leqslant 14\\2x_1 + x_2 \leqslant 9\\x_1,\ x_2 \geqslant 0\\x_1,\ x_2\ \text{为整数}\end{cases};$$

（3）
$$\max z = x_1 + x_2$$
$$\text{s.t}\begin{cases}2x_1 + x_2 \leqslant 6\\4x_1 + 5x_2 \leqslant 20\\x_1,\ x_2 \geqslant 0\\x_1,\ x_2\ \text{为整数}\end{cases};$$

（4）
$$\max z = 3x_1 - x_2$$
$$\text{s.t}\begin{cases}3x_1 - 2x_2 \leqslant 3\\-5x_1 - 4x_2 \leqslant -10\\2x_1 + x_2 \leqslant 5\\x_1,\ x_2 \geqslant 0\\x_1,\ x_2\ \text{为整数}\end{cases}。$$

2. 某科学试验卫星拟从表 6-18 所列仪器装置中选择若干件安装上。

表 6-18　仪器数据表

仪器装置代号	体积	质量	试验中的价值
A_1	v_1	w_1	c_1
A_2	v_2	w_2	c_2
A_3	v_3	w_3	c_3
A_4	v_4	w_4	c_4
A_5	v_5	w_5	c_5
A_6	v_6	w_6	c_6

要求：装入卫星的仪器装置总体积不超过 V，总质量不超过 W；A_1 和 A_3 最多安装一件；A_2 和 A_4 至少安装一件；A_5 和 A_6 或者都安装，或者都不安装。

总的目的是仪器装置使得该卫星发挥最大的试验价值。建立这个问题的数学模型。

3. 某钻井队要从以下十个可供选择的井位中确定五个钻井探油，使得总的钻探费用最小。十个井位的代号分别是 $s_1 \sim s_{10}$，相应的钻探费用为 $c_1 \sim c_{10}$，并且井位的选择要满足如下条件：或选择 s_1 和 s_7，或选择钻探 s_8；选择了 s_3 或 s_4 就不能选择 s_5，反过来也一样；在 s_5，s_6，s_7，s_8 中最多选择两个。试建立这个问题的整数规划模型。

4. 某市为了方便学生上学，拟在新建的居民小区增设若干所小学。备选校址代号及其能覆盖的居民小区编号见表 6-19。为覆盖所有小区至少应建多少所小学？请立数学建模型。

表 6-19　居民小区编号表

备选校址代号	覆盖的居民小区编号
A	1, 5, 7
B	1, 2, 5
C	1, 3, 5
D	2, 4, 5
E	3, 6
F	4, 6

5. 用隐枚举法求解下列 0-1 规划问题：

（1）$\max z = 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 3x_5$

$$\text{s. t:}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \leqslant 4 \\ 7x_1 + 3x_3 - 4x_4 + 3x_5 \leqslant 8 \\ 11x_1 - 6x_2 + 3x_4 - 3x_5 \geqslant 3 \\ x_j = 0, or 1. j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases};$$

（2）$\max z = 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5$

$$\text{s. t:}\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 4x_5 \leqslant 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 \leqslant 0 \\ x_j = 0, or 1. j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases};$$

（3）$\max z = 8x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 7x_4 - 5x_5$

$$\text{s. t:}\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leqslant 4 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 \leqslant 4 \\ x_j = 0, or 1. j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}。$$

6. 用匈牙利算法求解下列指派问题。

（1）$\begin{pmatrix} 7 & 9 & 10 & 12 \\ 13 & 12 & 16 & 17 \\ 15 & 16 & 14 & 15 \\ 11 & 12 & 15 & 16 \end{pmatrix}$；　（2）$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & 10 & 3 \\ 8 & 7 & 2 & 9 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 7 & 5 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 10 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$。

第 7 章　动 态 规 划

本章概要

动态规划引例
7.1　动态规划概述
　7.1.1　动态规划的概念
　7.1.2　动态规划求解的基本方程
　7.1.3　逆推解法
　7.1.4　顺推解法
　7.1.5　终端自由的动态规划
7.2　动态规划的应用
　7.2.1　资源分配问题
　7.2.2　生产与存储问题
　7.2.3　不确定性采购
　7.2.4　背包问题
　7.2.5　复合系统工作可靠性
　7.2.6　排序问题
　7.2.7　设备更新问题
　7.2.8　货郎担问题

学习目标　学完本章后，你将能够：

1. 识别动态规划的基本概念。
2. 理解动态规划的基本思想与基本方程。
3. 掌握动态规划的基本解法，并能熟练应用。
4. 能够采用动态规划的思想解决一些管理问题。

动态规划引例

在萨达姆·侯赛因命令伊拉克军队于 1990 年 8 月 2 日入侵科威特 6 天之后，美国开始将大批军队和物资运往波斯湾地区。在以美国为首的来自 35 个国家的联合国部队集结完毕后，1991 年 1 月 17 日发动了被称为“沙漠风暴”的军事行动。联合国部队获得了决定性的胜利，科威特被解放，联合国部队攻入伊拉克。

将需要的部队和物资快速运往战区是一项令人畏惧的物流任务。在一个典型的空运任务中，从美国本土空运部队和物资到波斯湾往返需要 3 天，途径 7 个或更多的空域，消耗大约 100 万 lb 燃料，成本高达 280 000 美元。在整个“沙漠风暴”行动期间，美国空军机动司令部(MAC)平均每天要组织超过 100 次的类似空运，指挥着历史上最大规模的空运。

为了满足需要，应用运筹学开发的决策支持系统需要对每个空运任务进行调度和分配航线。驱动该过程的运筹学技术是动态规划方法。动态规划建模中的阶段对应于空运计划的飞行路径网络中的机场。对于一个给定的机场，状态用从机场的起飞时间及当前机组成员的剩余职责描述。要求最小化的目标函数是一个性能测度——包括交货的延误、任务的飞行时间、起落时间及机组成员改变的数量等。约束包括一次任务的最低载货量、机场可用机组成员及地面物资支持的上限。

动态规划的应用发挥了意想不到的效果，快速地将所需要的物资和部队运送到波斯湾以支持“沙漠风暴”行动。当与该方法的开发者交谈时，MAC 负责运营和运输的总参谋长说：“我发誓，没有你们的帮助及你们所做的贡献(决策支持系统)，我们是无法成功的(在波斯湾的部署)——我们绝对无法做到。”

7.1 动态规划概述

动态规划是解决多阶段决策过程最优化问题的一种数学方法。1951 年美国数学家贝尔曼等人通过这种方法根据一类多阶段决策问题的特点，把多阶段决策问题分解为一系列互相联系的单阶段问题，然后逐个加以解决，从而创建了解决最优化问题的新方法——动态规划。

7.1.1 动态规划的概念

在介绍动态规划求解算法和应用之前，有必要先介绍动态规划求解的相关概念。

1. 阶段

基于时间或者空间等自然特征，把决策问题分为若干个相互联系的阶段，从而按一定的次序去求解。描述阶段的变量称为阶段变量，常用 k 表示。

2. 状态

表示每个阶段开始所处的自然状况或客观条件，描述了研究问题过程的状况，又称不可控因素。状态既是某阶段的出发位置，即该阶段某支路的起点，又是前一阶段某支路的终点，第 k 阶段的状态就是第 k 阶段所有始点的集合。通常，一个阶段有若干个状态，描述过程状态的变量称为状态变量，可用一个数、一组数或向量(多维情形)来描述，常用 s_k 表示第 k 阶段的状态变量。

状态具有无后效性(马尔科夫性)，即如果某阶段状态给定后，则在这阶段以后过程的发

展不受这阶段以前各段状态的影响。如果某种给定的状态设计思路不满足无后效性的要求，就需要适当地改变状态的规定方法，以确保满足无后效性。

3. 决策

在某一阶段的某个状态时，可以做出不同的决定（或选择），从而确定下一阶段的状态，这种决定称为决策。描述决策的变量，称为决策变量，常用 $u_k(s_k)$ 表示第 k 阶段处于状态 s_k 时的决策变量。决策变量的取值往往限制在某一范围之内（允许决策集合）。常用 $D_k(s_k)$ 表示第 k 阶段从状态 s_k 出发的允许决策集合，有 $u_k(s_k) \in D_k(s_k)$ 。

4. 策略

一个按顺序排列的决策组成的集合。由第 k 阶段开始到终止状态为止的过程，称为问题的后部子过程（或称为 k 子过程）。每段的决策按照顺序排列组成的决策函数序列 $\{u_k(s_k), \cdots, u_n(s_n)\}$ 称为 k 子过程策略，简称子策略，记为 $p_{k,n}(s_k)$ ，即

$$p_{k,n}(s_k) = \{u_k(s_k), u_{k+1}(s_{k+1}), \cdots, u_n(s_n)\}$$

当 $k=1$ 时，此决策函数序列称为全过程的一个策略，简称策略，记为 $p_{1,n}(s_1)$ ，即

$$p_{1,n}(s_1) = \{u_1(s_1), u_2(s_2), \cdots, u_n(s_n)\}$$

在实际问题中，可供选择的策略有一定的范围（允许策略集合），用 P 表示。从允许策略集合中找出达到最优效果的策略称为最优策略。

5. 状态转移方程

确定过程由一个状态到另一个状态的演变过程，s_{k+1} 的值常随着 s_k 和 μ_k 的值变化而变化，可记为 $s_{k+1} = T_k(s_k, \mathrm{u}_k)$ 。如果第 k 阶段状态变量 s_k 和决策变量 u_k 确定，第 $k+1$ 阶段的状态变量 s_{k+1} 的值也就完全确定。该式描述了由 k 阶段到 $k+1$ 阶段的状态转移规律，称为状态转移方程。T_k 称为状态转移函数。

6. 指标函数

指标函数是用来衡量所实现过程优劣的一种数量指标，是定义在全过程和所有后部子过程上确定的数量函数，即 $V_{k,n} = V_{k,n}(s_k, u_k, s_{k+1}, \cdots, s_{n+1})$，$k = 1, 2, \cdots, n$ 。指标函数 $V_{k,n}$ 应该具有可分离性，并满足递推关系，即 $V_{k,n}$ 可以表示为 s_k，u_k，$V_{k+1,n}$ 的函数。

$$V_{k,n}(s_k, u_k, s_{k+1}, \cdots, s_{n+1}) = \psi_k[s_k, u_k, V_{k+1,n}(s_{k+1}, \cdots, s_{n+1})] \tag{7-1}$$

若式(7-1)采用和的方式计算，则 $V_{k,n}(s_k, u_k, \cdots, s_{n+1}) = \sum_{j=k}^{n} v_j(s_j, u_j)$ ，其中 $v_j(s_j, u_j)$ 表示第 j 阶段的阶段指标，即 $V_{k,n}(s_k, u_k, \cdots, s_{n+1}) = v_k(s_k, u_k) + V_{k+1,n}(s_{k+1}, u_{k+1}, \cdots, s_{n+1})$。

若式(7-1)采用乘积的方式计算，则 $V_{k,n}(s_k, u_k, \cdots, s_{n+1}) = \prod_{j=k}^{n} v_j(s_j, u_j)$ ，也可以表示为 $V_{k,n}(s_k, u_k, \cdots, s_{n+1}) = v_k(s_k, u_k) V_{k+1,n}(s_{k+1}, u_{k+1}, \cdots, s_{n+1})$ 。

最优值函数[$f_k(s_k)$]是从第 k 阶段的 s_k 开始到第 n 阶段的终止状态的过程，采取最优策略所得到的指标函数值，即 $f_k(s_k) = \underset{\{u_k, \cdots, u_n\}}{\mathrm{opt}} V_{k,n}(s_k, u_k, \cdots, s_{n+1})$ 。其中，opt 是最优化（optimization）的缩写，可取 max 或 min 。

7. 基本方程

$f_k(s_k) = \underset{u_k \in D_k(s_k)}{\mathrm{opt}} \{v_k[s_k, u_k(s_k)] + f_{k+1}[u_k(s_k)]\}$，$k = n, n-1, \cdots, 1$ 。其边界条件为 $f_{n+1}(s_{n+1}) = 0$ 。

【例 7-1】(管网铺设)给定一个管网线路网络，如图 7-1 所示，两点之间连线上的数字表示两点间的距离(或费用)。试求一条由 A 到 E 的铺管线路，使总距离最短(或总费用最少)。

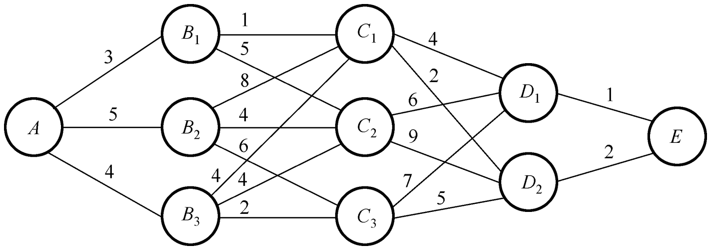


图 7-1　管网线路图

【解】对照上述动态规划的基本概念，将作如下分析。

(1)阶段。将该问题划分为四个阶段。从 T 到 v_1，v_2，v_3，v_4，v_5 为第一阶段，从 v_1，v_2，v_3，v_4，v_5，v_6，v_7，v_8 到 v_i 为第二阶段，从 v_i 到 v_i 为第三阶段，从 v_i 到 v_j 为第四阶段。

(2)状态：在第一阶段，A 为起点，终点状态有 B_1、B_2、B_3 三个，同时也是第二阶段的起点状态；第二阶段的终止状态也是第三阶段的初始状态，有 C_1、C_2、C_3 三个；第三阶段的终止状态也是第四阶段的初始状态，即 D_1、D_2 两个；第四阶段的终止状态为 E 。于是，可以将 S_k 分别表示为 $S_1 = \{A\}$ ，$S_2 = \{B_1, B_2, B_3\}$ ，$S_3 = \{C_1, C_2, C_3\}$ ，$S_4 = \{D_1, D_2\}$ 。上述状态设定满足无后效性要求，如第二阶段状态不受到第一阶段状态的影响。

(3)决策。基于决策的含义，有

$u_1(A) \in D_1(A) = \{B_1, B_2, B_3\}$

$D_2(B_1) = \{C_1, C_2\}$ ，$D_2(B_2) = \{C_1, C_2, C_3\}$ ，$D_2(B_3) = \{C_1, C_2, C_3\}$

$D_3(C_1) = \{D_1, D_2\}$ ，$D_3(C_2) = \{D_1, D_2\}$ ，$D_3(C_3) = \{D_1, D_2\}$

$D_4(D_1) = \{E\}$ ，$D_4(D_2) = \{E\}$

(4)确定策略，如

$p_{1,4}(A) = \{u_1(A) = B_2, u_2(B_2) = C_2, u_3(C_2) = D_1, u_4(D_1) = E\}$

$p_{3,4}(A) = \{u_3(C_1) = D_2, u_4(D_2) = E\}$

(5)确定状态转移方程，如

$s_2 = T_1[A, u_1(A) = B_1] = B_1$ ，$s_3 = T_2[B_2, u_2(B_2) = C_3] = C_3$

(6)指标函数，由于本题主要采用和的方式(计算距离)，如

$V_{3,4}(s_3 = C_1, u_3 = D_1, s_4 = D_1, u_4 = E) = v_3(s_3 = C_1, u_3 = D_1) + v_4(s_4 = D_1, u_4 = E) = 5$

$V_{3,4}(s_3 = C_1, u_3 = D_2, s_4 = D_2, u_4 = E) = v_3(s_3 = C_1, u_3 = D_2) + v_4(s_4 = D_2, u_4 = E) = 4$

最优指标函数为 $f_3(C_1) = \min(4, 5) = 4$ 。

(7)列基本方程，如

$f_3(C_1) = \mathrm{opt}\{v_3[C_1, u_3(C_1) = D_1] + f_4(D_1), v_3[C_1, u_3(C_1) = D_2] + f_4(D_2)\} = 4$

7.1.2　动态规划求解的基本方程

20 世纪 50 年代，R. Bellman 等人提出了最优性原理。动态规划的最优性原理就是作为整个过程的最优策略具有这样的性质，即无论过去的状态和决策如何，对前面的决策所形成的状态而言，余下的决策必须构成最优策略，即一个最优决策的子策略总是最优的。

对不同类型的问题所建立为严格定义的动态规划模型，必须对相应的最优性原理进行验证，即最优性原理不是对任何决策过程都普遍成立的，而且“最优性原理”与动态规划基本方程并不是无条件等价的，两者之间也不存在确定的蕴含关系。因此，反映动态规划基本方程的是最优性定理，是策略最优性的充分必要条件。在求解最优策略时，更需要的是其充分条件，所以动态规划的基本方程或者说最优性定理才是动态规划的理论基础。

【最优性定理】设数目为 n 的多阶段决策过程，阶段编号分别为 $k=0,1,\cdots,n-1$，允许策略 $p_{0,n-1}^{*}=(u_0^{*},u_1^{*},\cdots,u_{n-1}^{*})$ 为最优策略的充要条件是：对任意 k 和 $s_0\in S_0$，有

$$V_{0,n-1}(s_0,p_{0,n-1}^{*})=\underset{p_{0,k-1}\in p_{0,k-1}(s_0)}{\mathrm{opt}}\left\{V_{0,k-1}(s_0,p_{0,k-1})+\underset{p_{k,n-1}\in p_{k,n-1}(\tilde{s}_k)}{\mathrm{opt}}V_{k,n-1}(\tilde{s}_k,p_{k,n-1})\right\} \tag{7-2}$$

式中，$p_{0,n-1}^{*}=(p_{0,k-1},p_{k,n-1})$，$\tilde{s}_k=T_{k-1}(s_{k-1},u_{k-1})$，是由给定的初始状态 s_0 和子策略 $p_{0,k-1}$ 所确定的 k 阶段状态。当 V 是效益函数时，opt 取 max；当 V 是损失函数时，opt 取 min。

如果允许策略 $p_{0,n-1}^{*}$ 是最优策略，则 $\forall k$，$0<k<n-1$ 子策略 $p_{k,n-1}^{*}$ 对于以起点 k 到 $n-1$ 子过程[$s_k^{*}=T_{k-1}(s_{k-1}^{*},u_{k-1}^{*})$]来说，必是最优策略（$k$ 阶段状态 s_k^{*} 是由 s_0 和 $p_{0,k-1}^{*}$ 所确定的）。如果决策问题有最优策略，则其最优值函数一定可用动态规划的基本方程来表示，反之亦然。有关最优性定理的证明见附录 B。

于是，如果用动态规划方法处理决策问题，就要充分分析决策问题的结构，使它满足动态规划的条件，正确地写出动态规划的基本方程。具体可以表示如下：

(1)将决策问题划分为几个相互联系的阶段，恰当地选取状态变量和决策变量及定义最优值函数，正确地写出基本的递推关系式和恰当地边界条件（即基本方程）。从边界条件开始，逐段递推寻优，在每一个子问题的求解中，均利用它前面的子问题的最优化结果，依次进行，最后一个子问题所得的最优解，就是整个问题的最优解。

(2)在动态规划求解中，把当前一个阶段和未来各阶段分开，把当前效益和未来效益结合起来，每段决策的选取是从全局来考虑的，与该段的最优选择有所不同。

(3)在求整个问题的最优策略时，每段的决策都是该段初始状态的函数，最优策略所经过的各段状态便可逐次变换得到，从而确定了最优路线。

基于上述原理和基本思想，在运用动态规划求解过程中，必须做到：

(1)将问题的过程划分成恰当的阶段。

(2)正确选择状态变量 s_k，既能描述过程的演变，又要满足无后效性。

(3)确定决策变量 u_k 及每阶段的允许决策集合 $D_k(s_k)$。

(4)正确写出状态转移方程。

(5)正确写出指标函数 $V_{k,n}$。指标函数是定义在全过程和所有后部子过程上的数量函数，且可分离和满足递推关系，即 $V_{k,n}(s_k,u_k,\cdots,s_{n+1})=\psi_k[s_k,u_k,V_{k+1,n}(s_{k+1},u_{k+1},\cdots,s_{n+1})]$，函数 $\psi_k[s_k,u_k,V_{k+1,n}]$ 对于变量 $V_{k+1,n}$ 要严格单调。

【例 7-2】按照动态规划求解方法求解【例 7-1】。

【解】首先将该问题划分为四个阶段，分别为 $k=1,2,3,4$。

当 $k=4$ 时，$f_4(D_1)=1$，即由 D_1 到终点 E 的最短距离为 1，则其路线是 $D_1\rightarrow E$；$f_4(D_2)=2$，即由 D_2 到终点 E 的最短距离为 2，则其路线是 $D_2\rightarrow E$。

当 $k=3$ 时，$f_3(C_1)=\min\begin{Bmatrix}d_3(C_1,D_1)+f_4(D_1)\\d_3(C_1,D_2)+f_4(D_2)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}4+1\\2+2\end{Bmatrix}=4$，即由 C_1 至终点 E

的最短距离为4，最短路线是 $C_1 \to D_2 \to E$。同理，$f_3(C_2) = \min\begin{cases} d_3(C_2, D_1) + f_4(D_1) \\ d_3(C_2, D_2) + f_4(D_2) \end{cases} = \min\begin{cases} 6+1 \\ 9+2 \end{cases} = 7$，$f_3(C_3) = \min\begin{cases} d_3(C_3, D_1) + f_4(D_1) \\ d_3(C_3, D_2) + f_4(D_2) \end{cases} = \min\begin{cases} 7+1 \\ 5+2 \end{cases} = 7$，即由 C_2 至终点 E 的最短距离为7，最短路线是 $C_2 \to D_1 \to E$；由 C_3 至终点 E 的最短距离为7，最短路线是 $C_3 \to D_2 \to E$。

当 $k = 2$ 时，

有 $f_2(B_1) = \min\begin{cases} d_2(B_1, C_1) + f_3(C_1) \\ d_2(B_1, C_2) + f_3(C_2) \end{cases} = \min\begin{cases} 1+4 \\ 5+7 \end{cases} = 5$

$$f_2(B_2) = \min\begin{cases} d_2(B_2, C_1) + f_3(C_1) \\ d_2(B_2, C_2) + f_3(C_2) \\ d_2(B_2, C_3) + f_3(C_3) \end{cases} = \min\begin{cases} 8+4 \\ 4+7 \\ 6+7 \end{cases} = 11$$

$$f_2(B_3) = \min\begin{cases} d_2(B_3, C_1) + f_3(C_1) \\ d_2(B_3, C_2) + f_3(C_2) \\ d_2(B_3, C_3) + f_3(C_3) \end{cases} = \min\begin{cases} 4+4 \\ 4+7 \\ 2+7 \end{cases} = 8$$

即由 B_1 至终点 E 的最短距离为5，最短路线是 $B_1 \to C_1 \to D_2 \to E$；由 B_2 至终点 E 的最短距离为11，其最短路线是 $B_2 \to C_2 \to D_1 \to E$；由 B_3 至终点 E 的最短距离为8，最短路线是 $B_3 \to C_1 \to D_2 \to E$。

当 $k = 1$ 时，出发点只有一个 A 点，则 $f_1(A) = \min\begin{cases} d_1(A, B_1) + f_2(B_1) \\ d_1(A, B_2) + f_2(B_2) \\ d_1(A, B_3) + f_2(B_3) \end{cases} = \min\begin{cases} 3+5 \\ 5+11 \\ 4+8 \end{cases} = 8$，即由 A 至终点 E 的最短距离为8，其路线（最优路线）是 $A \to B_1 \to C_1 \to D_2 \to E$。

相应的最优策略为 $p_{1,4}(A) = \{u_1(A), u_2(B_1), u_3(C_1), u_4(D_2)\}$。

上述最短路线问题的计算过程，也可借助图形直观简明的表示出来，如图7-2所示。

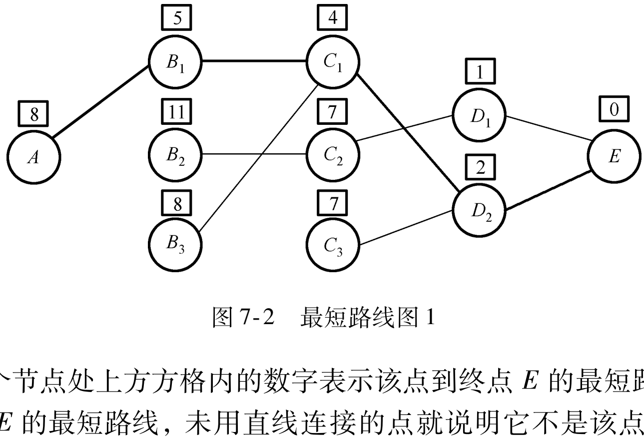


图7-2　最短路线图1

图7-2中，每个节点处上方方格内的数字表示该点到终点 E 的最短距离，用直线连接的点表示该点到终点 E 的最短路线，未用直线连接的点就说明它不是该点到终点 E 的最短路

线，故这些支路均被舍去。图中的粗线表示由始点 A 到终点 E 的最短路线。

这种在图上直接作业的方法叫作标号法。如果规定从 A 点到 E 点为顺行方向，则由 E 点到 A 点为逆行方向，那么，图 7-2 是以 A 为始端、E 为终端，从 E 到 A 的解法称为逆序解法。

由于线路网络的两端都是固定的，且线路上的数字是表示两点间的距离，则从 A 点计算到 E 点和从 E 点计算到 A 点的最短路线是相同的。因而，标号也可以由 A 开始，从前向后标。只是此时是视 E 为起点、A 为终点，按动态规划方法处理的，如图 7-3 所示。

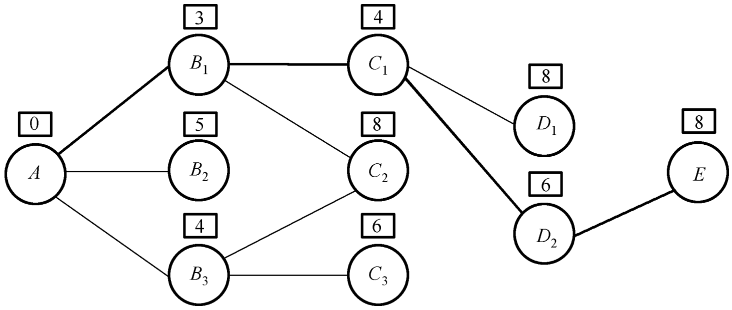


图 7-3　最短路线图 2

图 7-3 中，每个节点上方方格内的数字表示该点到 A 点的最短距离，用直线连接的点表示该点到起点 A 的最短路线，粗线表示 A 到 E 的最短路线。这种以 A 为始端、E 为终端的从 A 到 E 的解法称为顺序解法。

7.1.3　逆推解法

无论是顺推还是逆推，计算的过程均和前进方向相反，即首先需要规定前进方向。如果确定前进方向从左到右，则计算方向从右到左，这种解法称为逆推法；如果规定前进方向从右到左，则计算方向从左到右，这种解法称为顺推法。

如果采取逆推法，确定阶段编号，即 1，2，…，n。从 $k=n$ 开始，由后向前逆推，逐步可求得各段的最优决策和相应的最优值，最后求出 $f_1(s_1)$ 时，就得到整个问题的最优解。令最优值函数 表示第 k 阶段的初始状态为 s_k，从 k 阶段到 n 阶段所得到的最大效益。

从第 n 阶段开始，则有 $f_n(s_n)=\max\limits_{x_n\in D_n(s_n)} v_n(s_n,x_n)$，$D_n(s_n)$ 是由状态 s_n 所确定的第 n 阶段的允许决策集合。解此一维极值问题，就得到最优解 $x_n=x_n(s_n)$ 和最优值 $f_n(s_n)$。如果 $D_n(s_n)$ 只有一个决策，则 $x_n\in D_n(s_n)$ 就应写成 $x_n=x_n(s_n)$。

第 $n-1$ 阶段，有 $f_{n-1}(s_{n-1})=\max\limits_{x_{n-1}\in D_n(s_{n-1})}[v_{n-1}(s_{n-1},x_{n-1})f_n(s_n)]$，$s_n=T_{n-1}(s_{n-1},x_{n-1})$，解此一维极值问题，得到最优解 $x_{n-1}=x_{n-1}(s_{n-1})$ 和最优值 $f_{n-1}(s_{n-1})$。

在第 k 阶段，有 $f_k(s_k)=\max\limits_{x_k\in D_k(s_k)}[v_k(s_k,x_k)f_{k+1}(s_{k+1})]$，$s_{k+1}=T_k(s_k,x_k)$，解得最优解 $x_k=x_k(s_k)$ 和最优值 $f_k(s_k)$。

依此类推，直到第 1 阶段，有 $f_1(s_1)=\max\limits_{x_1\in D_1(s_1)}[v_1(s_1,x_1)f_2(s_2)]$，$s_2=T_1(s_1,x_1)$，解得最优解 $x_1=x_1(s_1)$ 和最优值 $f_1(s_1)$。

由于初始状态 s_1 已知，故 $x_1=x_1(s_1)$ 和 $f_1(s_1)$ 是确定的，$s_2=T_1(s_1,x_1)$ 也就确定，于是 $x_2=x_2(s_2)$ 和 $f_2(s_2)$ 也确定。按照上述递推过程相反的顺序推算下去，就可逐步确定出

每阶段的决策及效益。

如果指标函数采取各个阶段指标和的形式，则 $V_{k,n} = v_k(s_k, u_k) + V_{k+1,n}[s_{k+1}, \cdots, s_{n+1}]$。当初始状态给定时，过程的策略就被确定，则指标函数也就确定，可记为 $V_{k,n}[s_k, p_{k,n}(s_k)]$，$V_{k,n}[s_k, p_{k,n}] = v_k(s_k, u_k) + V_{k+1,n}[s_{k+1}, p_{k+1,n}]$。子策略 $p_{k,n}(s_k)$ 可看成是由决策 $u_k(s_k)$ 和 $p_{k+1,n}(s_{k+1})$ 组合而成，即 $p_{k,n} = \{u_k(s_k), p_{k+1,n}(s_{k+1})\}$。

如果用 $p^*_{k,n}(s_k)$ 表示初始状态为 s_k 的后部子过程所有子策略中的最优子策略，则最优值函数 $f_k(s_k) = V_{k,n}(s_k, p^*_{k,n}(s_k)) = \underset{\{u_k, p_{k+1,n}\}}{\mathrm{opt}}\{v_k(s_k, u_k) + V_{k+1,n}(s_{k+1}, p_{k+1,n}(s_k))\}$。同时，由于 $f_{k+1}(s_{k+1}) = \underset{p_{k+1,n}}{\mathrm{opt}} V_{k+1,n}(s_{k+1}, p_{k+1,n})$，所以，动态规划逆推解法的基本方程表示为

$$f_k(s_k) = \underset{u_k \in D_k(s_k)}{\mathrm{opt}}\{v_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \quad (k = n-1, \cdots, 0), f_n(s_n) = 0$$

【例 7-3】用逆推解法求解：

$$\max z = 2x_1^2 + 2x_2 + 4x_3 - x_3^2$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 4 \\ x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, 3)\end{cases}$$

【解】本题有三个变量 x_1、x_2、x_3，因此可以划分为三个阶段，第一阶段、第二阶段和第三阶段的初始状态分别为 s_1，s_2，s_3，第三阶段终止状态为 s_4。令 $s_4 = 0$，于是有

$$s_3 = x_3 s_3 + x_2 = s_2 s_2 + 2x_1 = s_1 \leqslant 4$$

则有 $x_3 = s_3 0 \leqslant x_2 \leqslant s_2 0 \leqslant x_1 \leqslant s_1/2$，$f_3(s_3) = \underset{x_3 = s_3}{\max}(4x_3 - x_3^2) = 4s_3 - s_3^2$ 及其最优解 $x_3^* = s_3$

$$f_2(s_2) = \underset{0 \leqslant x_2 \leqslant s_2}{\max}[2x_2 + f_3(s_3)] = \underset{0 \leqslant x_2 \leqslant s_2}{\max}[2x_2 + 4(s_2 - x_2) - (s_2 - x_2)^2]$$

求 $f_2(s_2)$ 的最大值，可以通过求导的方式获得 x_2 的最优解，且 $0 \leqslant x_2 \leqslant s_2$。

由于 $\dfrac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}x_2} = -2x_2 + 2s_2 - 2 = 0$，得 $x_2 = s_2 - 1$，又因为 $\dfrac{\mathrm{d}^2 h_2}{\mathrm{d}x_2^2} = -2 < 0$，故 $x_2 = s_2 - 1$ 为极大值点，所以 $f_2(s_2) = 2s_2 + 1$，最优解为 $x_2^* = s_2 - 1$。

$$f_1(s_1) = \underset{0 \leqslant x_1 \leqslant s_1/2}{\max}[2x_1^2 + f_2(s_2)] = \underset{0 \leqslant x_1 \leqslant s_1/2}{\max}[2x_1^2 + 2(s_1 - 2x_1) + 1]$$

求 $f_1(s_1)$ 的最大值，可以通过求导的方式获得 x_1 的最优解，且 $0 \leqslant x_1 \leqslant s_1/2$。

由于 $\dfrac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}x_1} = 4x_1 - 4 = 0$，得 $x_1 = 1$，又因为 $\dfrac{\mathrm{d}^2 h_1}{\mathrm{d}x_1^2} = 4 > 0$，故 $x_1 = 1$ 为极小值点。此时 $f_1(s_1)$ 的最大值应该在边界点获得。

由于 $f_1(0) = 2s_1 + 1$，$f_1\left(\dfrac{s_1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}s_1^2 + 1$，在 $s_1 < 4$ 时，可得 $f_1(0) \geqslant f_1\left(\dfrac{s_1}{2}\right)$，所以 $h_1(s_1, x_1)$ 的最大值点在 $x_1 = 0$ 处，即 $f_1(s_1) = 2s_1 + 1$，$x_1^* = 0$。

由于 s_1 未知，所以需再对 s_1 求一次极值，即 $\underset{0 \leqslant s_1 \leqslant 4}{\max} f_1(s_1) = \underset{0 \leqslant s_1 \leqslant 4}{\max}(2s_1 + 1)$。当 $s_1 = 4$ 时 $f_1(s_1)$ 才能达到最大值，所以 $f_1(4) = 2 \times 4 + 1 = 9$ 为最大值。

再按计算的顺序反推算，可得各阶段的最优决策和最优值，即 $x_1^* = 0$，$x_2^* = 3$，$x_3^* = 1$，最大值为 $\max z = 0 + 2 \times 3 + 4 \times 1 - 1 = 9$。

7.1.4　顺推解法

已知终止状态下的顺推解法与已知初始状态下的逆推解法在本质上没有区别，就是相当

于把实际的起点视为终点，实际的终点视为起点，按逆推解法进行。只要把输出 s_{k+1} 看作输入，把输入 s_k 看作输出，便得到顺推解法。

假定阶段 k 和状态变量 s_k 的定义不变，状态转移方程不是由 s_k、u_k 去确定 s_{k+1}，而是反过来由 s_{k+1}、u_k 去确定 s_k，表示为 $s_k = T_k(s_{k+1}, u_k)$。第 k 阶段的允许决策集合也改变为 $D_k(s_{k+1})$。

根据边界条件，从 $k = 1$ 开始，由前向后顺推，逐步求得各段的最优决策和相应的最优值，最后求出 $f_n(s_{n+1})$，就得到整个问题的最优解。设已知终止状态 s_{n+1}，并假定最优值函数 $f_k(s)$ 表示第 k 阶段末的结束状态为 s，从 1 阶段到 k 阶段所得到的最大收益。

从第 1 阶段开始，有 $f_1(s_2) = \max\limits_{x_1 \in D_1(s_1)} v_1(s_1, x_1)$，$s_1 = T_1^*(s_2, x_1)$，最优解为 $x_1 = x_1(s_2)$ 和最优值 $f_1(s_2)$。若 $D_1(s_1)$ 只有一个决策，则 $x_1 \in D_1(s_1)$ 就写成 $x_1 = x_1(s_2)$。

在第 2 阶段，有 $f_2(s_3) = \max\limits_{x_3 \in D_2(s_2)} [v_2(s_1, x_1)f_1(s_2)]$，$s_2 = T_2^*(s_3, x_2)$，最优解 $x_2 = x_2(s_3)$ 和最优值 $f_2(s_3)$。

依此类推，在第 n 阶段，有 $f_n(s_{n+1}) = \max\limits_{x_n \in D_n(s_n)} [v_n(s_n, x_n)f_{n-1}(s_n)]$，$s_n = T_n^*(s_{n+1}, x_n)$，最优解 $x_n = x_n(s_{n+1})$ 和最优值 $f_n(s_{n+1})$。

由于终止状态 s_{n+1} 已知，故 $x_n = x_n(s_{n+1})$ 和 $f_n(s_{n+1})$ 是确定的。再按计算过程的相反顺序推算上去，就可逐步确定出每阶段的决策及效益。

若将状态变量的记法改为 s_0，s_1，…，s_n，决策变量记法不变，则按顺序解法，此时的最优值函数为 $f_k(s_k)$。因而这个符号与逆推解法的符号一样，但含义是不同的，这里的 s_k 是表示 k 阶段末的结束状态。

因此，动态规划顺推解法的基本方程是

$$f_k(s_{k+1}) = \underset{u_k \in D_k(s_{k+1})}{\mathrm{opt}} \{v_k(s_{k+1}, u_k) + f_{k-1}(s_k)\} (k = 1, \cdots, n), f_0(s_1) = 0$$

【例 7-4】用顺推法解【例 7-3】。

【解】本题有三个变量 x_1、x_2、x_3，因此可以划分为三个阶段，第一阶段、第二阶段和第三阶段的初始状态分别为 s_3，s_2，s_1。令 $s_0 = 0$，于是

$$2x_1 = s_1 s_1 + x_2 = s_2 s_2 + x_3 = s_3 \leqslant 4$$

则有

$$x_1 = s_1/20 \leqslant x_2 \leqslant s_2 0 \leqslant x_3 \leqslant s_3$$

$$f_1(s_1) = \max_{x_1 = s_1/2}(2x_1^2) = \frac{1}{2}s_1^2$$

及

$$最优解\ x_1^* = \frac{s_1}{2}$$

$$f_2(s_2) = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant s_2}[2x_2 + f_1(s_1)] = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant s_2}\left[2x_2 + \frac{1}{2}(s_2 - x_2)^2\right] = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant s_2} h_2(s_2, x_2)$$

由于 $\dfrac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}x_2} = x_2 - s_2 + 2 = 0$，得 $x_2 = s_2 - 2$，又 $\dfrac{\mathrm{d}^2 h_2}{\mathrm{d}x_2^2} = 1 > 0$，故 $x_2 = s_2 - 1$ 为极小值点，而 $f_2(0) = \dfrac{1}{2}s_2^2$，$f_2(s_2) = 2s_2$。由于 $s_2 \leqslant s_1 \leqslant 4$，可得 $f_2(s_2) \geqslant f_2(0)$，所以 $h_2(s_2, x_2)$ 的最大值点在 $x_2 = s_2$ 处，所以得 $f_2(s_2) = 2s_2$ 及最优解 $x_2^* = s_2$

$$f_3(s_3) = \max_{0 \leqslant x_3 \leqslant s_3}[4x_3 - x_3^2 + f_2(s_2)] = \max_{0 \leqslant x_3 \leqslant s_3}[4x_3 - x_3^2 + 2(s_3 - x_3)] = \max_{0 \leqslant x_3 \leqslant s_3} h_3(s_3, x_3)$$

由于 $\dfrac{\mathrm{d}h_3}{\mathrm{d}x_3}=-2x_3+2=0$，得 $x_3=1$，又 $\dfrac{\mathrm{d}^2h_3}{\mathrm{d}x_3^2}=-2<0$，故 $x_3=1$ 为极大值点，所以得 $f_3(s_3)=2s_3+1$ 及最优解 $x_3^*=1$。

由于 s_3 未知，所以需再对 s_3 求一次极值，即 $\max\limits_{0\leqslant s_3\leqslant 4}f_3(s_3)=\max\limits_{0\leqslant x_3\leqslant 4}(2s_3+1)$，当 $s_3=4$ 时 $f_3(s_3)$ 才能达到最大值，所以 $f_3(4)=2\times4+1=9$ 为最大值。

再按计算的顺序反推算，可得各阶段的最优决策和最优值，即 $x_1^*=0$，$x_2^*=3$，$x_3^*=1$，最大值为 $\max z=0+2\times3+4\times1-1=9$。

7.1.5　终端自由的动态规划

如果函数序列 $f_k(s_k)$ 不能表示为解析形式，即使状态变量 s_k 和决策变量 x_k 是离散的，求 $f_k(s_k)$ 和最优策略的数值解就要用计算机来解决。由于始端和终端均可能是自由状态或固定状态，其组合就有四种情况。本节主要讨论终端自由且始端自由或固定的两种情况。

假设：决策变量 x_k 和状态变量 s_k 是连续实变数，允许决策集合 $D_k(s_k)$ 是实数集合，各阶段可达状态集合 S_k 的实数闭区间是 $[\underline{s}_k,\bar{s}_k]$，对于始端固定的状态变量，各段可达状态集合 s_k^1 的实数闭区间是 $[\underline{s}_k^1,\bar{s}_k^{-1}]$。此时需要离散化 s_k 并选好适当的增量 Δs。在第 k 阶段，计算在 $\{\underline{s}_k,\underline{s}_k+\Delta s,\cdots,\underline{s}_k+m_k\Delta s\}$ 上进行，m_k 是满足 $s_k+m_k\Delta s\leqslant\bar{s}_k\leqslant\bar{s}_k+(m_k+1)\Delta s$ 的正整数。

根据一般的逆序动态规划的基本方程

$$\begin{cases}f_{n+1}(s_{n+1})=0\\ f_k(s_k)=\underset{x_k\in D_k(s_k)}{\mathrm{opt}}\{v_k(s_k,x_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\}\ (k=n,\cdots,2,1)\end{cases}$$

其中，$s_{k+1}=T_k(s_k,s_k)$，且当 s_1 固定时，$s_k\in S_k^1$；当 s_1 自由时，$s_k\in S_k$。因而可得动态规划的逆序解法计算程序框图，如图 7-4 所示。

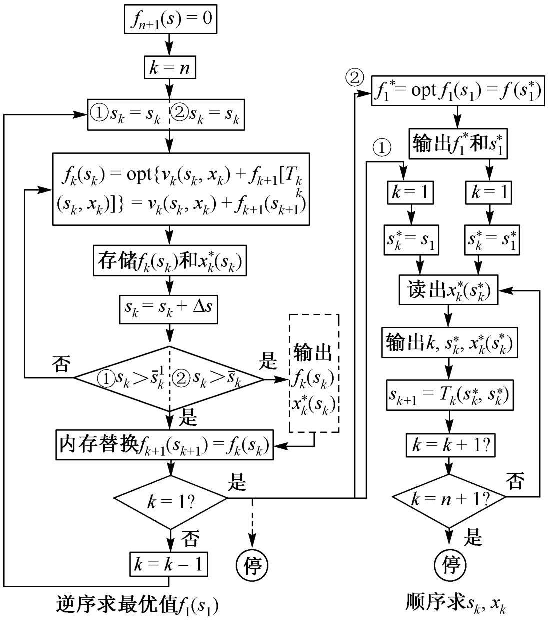


图 7-4　程序框图

（1）图 7-4 的左半部分是指标函数序列 $\{f_k(s_k)\}$ 的递推计算，它是逆序的，即 k 由 n 逐步减少到 1；右半部分是最优决策序列 $\{x_k^*\}$ 的递推计算，它是顺序的，即 k 由 1 逐步增大到 n。

（2）如果需要计算从各段出发的最优策略和最优值。对每一 k 阶段，计算完 $f_k(s_k)$ 和 $x_k^*(s_k)$ 后就可输出，图中虚线所示。如不需要输出 s_k，可把右半部分框图取消。

（3）框图中包含①固定始端和②自由始端两种情况。区别是：左边部分输入数据不同：右半部分在②自由始端情况下多求一次最优值计算。

（4）因 $f_{k+1}(s_{k+1})$ 只在计算 k 阶段时有用，故 $f_k(s_k)$ 都要存入内存，在计算 $k-1$ 阶段时，可用 $f_k(s_k)$ 把 $f_{k+1}(s_{k+1})$ 替换掉。函数 $x_k^*(s_k)$ 在左半部分计算出来后，可送入外存。在右半部分求 $\{x_k^*\}$ 需用时，再依 k 的序列将 x_k 由外存移入内存。

（5）在计算 $f_k(s_k)$ 时，s_k 在点列上取值。对于点 $s_k = \underline{s}_k + j\Delta s(0 \leqslant j \leqslant m_k)$ 和点 $\tilde{s}_{k+1} = T_k(s_k, x_k)(x_k \in D_k(s_k))$，不一定在 s_{k+1} 的点列中，必须选择适当的内插公式，由 $f_{k+1}(s_{k+1})$ 在点列上的值求出它在点 $\tilde{s}_{k+1}$ 上的值。

7.2 动态规划的应用

动态规划有着与线性规划完全不同的思路和方法，能处理许多其他数学规划方法不能解决的问题，特别是离散性问题，是现代企业管理中的一种重要的决策方法，可以用来解决最优路径问题、资源分配问题、生产调度问题、库存问题、装载问题、排序问题、设备更新问题、生产过程最优控制问题等。

7.2.1 资源分配问题

【例 7-5】某公司拟将某种高效率的设备五台分配给所属的甲、乙、丙三个工厂，各工厂若获得这种设备之后，可以提供的盈利见表 7-1。这五台设备如何分配，才能使盈利最大？

表 7-1 盈 利 表 （单位：万元）

设备台数 \ 工厂	甲	乙	丙
1	4	6	4
2	9	10	6
3	12	12	11
4	16	15	16
5	19	20	21

【解】将问题按工厂分为三个阶段，甲、乙、丙三个工厂分别编号为 1、2、3，假定 x_k 表示为分配给第 k 个工厂的设备台数，有 $x_1 + x_2 + x_3 = 5$。

s_k 表示为分配给第 k 个工厂至第 n 个工厂的设备台数，则 $s_{k+1} = s_k - x_k$ 为分配给第 $k+1$ 个工厂至第 n 个工厂的设备台数。

$P_k(x_k)$ 表示为 x_k 台设备分配到第 k 个工厂所得的盈利，$f_k(s_k)$ 表示为 s_k 台设备分配给第 k 个工厂至第 n 个工厂时所得到的最大盈利。如果采用逆推解法，则

$$f_k(s_k) = \max_{0 \leqslant x_k \leqslant s_k}[P_k(x_k) + f_{k-1}(s_k - x_k)],\ k = 3, 2, 1, f_4(s_4) = 0$$

如将 s_3 台设备全部分配给工厂丙，则最大盈利为 $f_3(s_3) = \max\limits_{x_3}[P_3(x_3)]$，其中 $x_3 = s_3 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$。数值计算见表 7-2。其中，$x_3^*$ 是 $f_3(s_3)$ 为最大值时的最优决策。

表 7-2 设备分配给工厂丙的盈利

s_3 \ x_3	$P_3(x_3)$ 0	1	2	3	4	5	$f_3(s_3)$	x_3^*
0	0						0	0
1		4					4	1
2			6				6	2
3				11			11	3
4					16		16	4
5						21	21	5

如把 s_2 台设备（$s_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$）分配给工厂乙和丙时，对每个 s_2 值,有一种最优分配方案使最大盈利为 $f_2(s_2) = \max\limits_{x_2}[P_2(x_2) + f_3(s_2 - x_2)]$（$x_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$），见表7-3。

表7-3　设备分配给工厂乙和丙的盈利

s_2 \ x_2	$P_2(x_2)+f_3(s_2-x_2)$						$f_2(s_2)$	x_2^*
	0	1	2	3	4	5		
0	0						0	0
1	0+4	6+0					6	1
2	0+6	6+4	10+0				10	2, 1
3	0+11	6+6	10+4	12+0			14	2
4	0+16	6+11	10+6	12+4	15+0		17	1
5	0+21	6+16	10+11	12+6	15+4	20+0	22	1

如果把（$s_1 = 5$）台设备分配给甲、乙、丙三个工厂，则最大盈利可以表示为 $f_1(5) = \max\limits_{x_1}[P_1(x_1) + f_2(5 - x_1)]$，其中 $x_1 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$。工厂甲分配 x_1 台的盈利为 $P_1(x_1)$，剩下的 $5 - x_1$ 台就分配给工厂乙和丙，盈利的最大值为 $f_2(5 - x_1)$。计算见表7-4。

表7-4　设备分配给三个工厂的盈利

s_1 \ x_1	$P_1(x_1)+f_2(5-x_1)$						$f_1(5)$	x_1^*
	0	1	2	3	4	5		
5	0+22	4+17	9+14	12+10	16+6	19+0	23	2

于是，得到最优解为 $x_1 = 2$，$x_2 = 2$，$x_3 = 1$。

本例中，决策变量取离散值，资源分配不考虑回收利用的问题，称为资源平行分配问题。还有一类问题，决策变量为连续的，称为资源连续分配问题，如【例7-6】。

【例7-6】（机器负荷分配问题）某种机器可在高低两种不同的负荷下进行生产，设机器在高负荷下生产的产量函数为 $g = 8u_1$，其中 u_1 为投入生产的机器数量，年完好率 $a = 0.7$；在低负荷下生产的产量函数为 $h = 5y$，其中 y 为投入生产的机器数量，年完好率为 $b = 0.9$。假定开始生产时完好的机器数量 $s_1 = 1000$ 台，试问每年如何安排机器在高、低负荷下的生产，可使在五年内生产的产品总产量最高？

【解】设阶段序数 k 表示年度，s_k 为第 k 年初拥有的完好机器数量，也是第 $k-1$ 年末时的完好机器数量；u_k 为第 k 年度中分配给高负荷下生产的机器数量，$s_k - u_k$ 为该年度中分配在低负荷下生产的机器数量，s_k 和 u_k 均取连续变量。

状态转移方程为 $s_{k+1} = au_k + b(s_k - u_k) = 0.7u_k + 0.9(s_k - u_k)$（$k = 1, 2, 3, 4, 5$）。$k$ 阶段允许决策集合为 $D_k(s_k) = \{u_k \mid 0 \leqslant u_k \leqslant s_k\}$。

设 $v_k(s_k, u_k)$ 为第 k 年度的产量，则 $v_k = 8u_k + 5(s_k - u_k)$。因此，指标函数可以表示为 $V_{1,5} = \sum\limits_{k=1}^{5} v_k(s_k, u_k)$。令最优值函数 $f_k(s_k)$ 表示从第 k 年初始状态为 s_k 到第5年结束时所生产的产品的总产量最大值。如果采用逆推解法，有

$$f_k(s_k) = \max_{u_k \in D_k(s_k)} \{8u_k + 5(s_k - u_k) + f_{k+1}(0.7u_k + 0.9(s_k - u_k))\}\ [k = 1, 2, 3, 4, 5), (f_6(s_6) = 0)]$$

当 $k = 5$ 时，有

$$f_5(s_5) = \max_{0 \leqslant u_5 \leqslant s_5} \{8u_5 + 5(s_5 - u_5) + f_6[0.7u_5 + 0.9(s_5 - u_5)]\} = \max_{0 \leqslant u_5 \leqslant s_5} \{3u_5 + 5s_5\}$$

因 f_5 是 u_5 的线性单调增函数，故最大解 $u_5^* = s_5$，相应的，有 $f_5(s_5) = 8s_5$。

当 $k = 4$ 时，有

$$
\begin{aligned}
f_4(s_4) &= \max_{0 \leqslant u_4 \leqslant s_4} \{8u_4 + 5(s_4 - u_4) + f_5[0.7u_4 + 0.9(s_4 - u_4)]\} \\
&= \max_{0 \leqslant u_4 \leqslant s_4} \{8u_4 + 5(s_4 - u_4) + 8[0.7u_4 + 0.9(s_4 - u_4)]\} \\
&= \max_{0 \leqslant u_4 \leqslant s_4} \{1.4u_4 + 12.2s_4\}
\end{aligned}
$$

故得最大解$u_4^* = s_4$，相应的，有 $f_4(s_4) = 13.6s_4$，依次类推，可求得

$$u_3^* = s_3 \text{，相应的，有 } f_3(s_3) = 17.5s_3$$

$$u_2^* = 0 \text{，相应的，有 } f_2(s_2) = 20.8s_2$$

$$u_1^* = 0 \text{，相应的，有 } f_1(s_1) = 23.7s_1$$

因 $s_1 = 1000$，故 $f_1(s_1) = 23\,700$ 台。最优策略 $u_1^* = 0$，$u_2^* = 0$，$u_3^* = s_3$，$u_4^* = s_4$，$u_5^* = s_5$，即前两年应把年初全部完好机器投入低负荷生产，后三年应把年初全部完好机器投入高负荷生产，其最高产量为 23 700 台。已知 $s_1 = 1000$ 台，每年年初完好机器数分别为

$$
\begin{aligned}
s_2 &= 0.7u_1^* + 0.9(s_1 - u_1^*) = 0.9s_1 = 900 \text{ 台} \\
s_3 &= 0.7u_2^* + 0.9(s_2 - u_2^*) = 0.9s_2 = 810 \text{ 台} \\
s_4 &= 0.7u_3^* + 0.9(s_3 - u_3^*) = 0.7s_3 = 567 \text{ 台} \\
s_5 &= 0.7u_4^* + 0.9(s_4 - u_4^*) = 0.7s_4 = 397 \text{ 台} \\
s_6 &= 0.7u_5^* + 0.9(s_5 - u_5^*) = 0.7s_5 = 278 \text{ 台}
\end{aligned}
$$

7.2.2 生产与存储问题

合理地安排生产（或购买）与库存的问题，就是既要满足社会的需要，又要尽量降低成本费用，目标是实现总的生产成本费用和库存费用之和最小。

【例 7-7】（生产计划问题）某工厂要对一种产品制定今后四个时期的生产计划。据估计，在今后四个时期内，市场对于该产品的需求量见表 7-5。

表 7-5　产品的需求量表

时期 k	1	2	3	4
需求量 d_k	3	2	4	2

假定该厂生产每批产品的固定成本为 3000 元，若不生产为 1000 元；每单位产品成本为 2000 元；每个时期生产能力所允许的最大生产批量为不超过 6 个单位；每个时期末未售出的产品，每单位需付存储费 0.500 元。还假定在第一个时期的初始库存量为 0，第四个时期之末的库存量也为 0。试问该厂应如何安排各个时期的生产与库存，才能在满足市场需求的条件下总成本最小？

【解】按四个时期将问题分为四个阶段，x_k 表示第 k 时期的生产量，则在第 k 时期内的生产成本为

$$
c_k(x_k) = \begin{cases} 1 & x_k = 0 \\ 3 + x_k & x_k = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ \infty & x_k > 6 \end{cases}
$$

第 k 时期末库存量为 v_k 时的存储费用为 $h_k(v_k) = 0.5v_k$，故第 k 时期内的总成本为 $c_k(x_k) + h_k(v_k)$。令 $\sigma_k = \min(v_k + d_k, 6)$，动态规划的顺序递推关系式为

$$f_k(v_k) = \min_{0 \leqslant x_k \leqslant \sigma_k} [c_k(x_k) + h_k(v_k) + f_{k-1}(v_k + d_k - x_k)] (k = 2, 3, 4)$$

其中，$f_1(v_1) = \min\limits_{x_1 = \min(v_1+3,\ 6)} [c_1(x_1) + h_1(v_1)]$。

当 $k = 1$ 时，$v_1 \in \left[0,\ \min\left(\sum_{j=2}^{4} d_j,\ m - d_1\right)\right] = [0, 3]$，于是有 $v_1 = 0$、1、2、3 时，$f_1(v_1)$ 分别等于 9 元、11.5 元、14 元和 16.5 元。

当 $k = 2$ 时，由于 $v_2 \in \left[0,\ \min\left(\sum_{j=3}^{4} d_j,\ m - d_2\right)\right] = [0, 4]$，且：

$$f_2(v_2) = \min_{0 \leqslant x_2 \leqslant \min(v_2+2,\ 6)} (c_2(x_2) + h_2(v_2) + f_1(v_2 + 2 - x_2))$$

于是

$$f_2(0) = \min_{0 \leqslant x_2 \leqslant 2} [c_2(x_2) + h_2(0) + f_1(2 - x_2)]$$
$$= \min(1 + 14, 5 + 11.5, 7 + 9) = 15$$

于是 $x_2 = 0$。

$$f_2(1) = \min_{0 \leqslant x_2 \leqslant 3} [c_2(x_2) + h_2(1) + f_1(3 - x_2)] = 18,\ x_2 = 0$$
$$f_2(2) = \min_{0 \leqslant x_2 \leqslant 4} [c_2(x_2) + h_2(2) + f_1(4 - x_2)] = 21,\ x_2 = 4$$
$$f_2(3) = \min_{0 \leqslant x_2 \leqslant 5} [c_2(x_2) + h_2(3) + f_1(5 - x_2)] = 23.5,\ x_2 = 5$$
$$f_2(4) = \min_{0 \leqslant x_2 \leqslant 6} [c_2(x_2) + h_2(4) + f_1(6 - x_2)] = 26,\ x_2 = 6$$

当 $k = 3$ 时，由于 $v_3 \in [0, \min(4, 6 - 4)] = [0, 2]$，且

$$f_3(v_3) = \min_{0 \leqslant x_3 \leqslant \min(v_3+4,\ 6)} [c_3(x_3) + h_2(v_3) + f_2(v_3 + 4 - x_3)]$$

于是

$$f_3(0) = \min_{0 \leqslant x_3 \leqslant 4} (c_3(x_3) + h_2(0) + f_2(4 - x_3)) = 26,\ x_3 = 4$$
$$f_3(1) = \min_{0 \leqslant x_3 \leqslant 5} (c_3(x_3) + h_2(1) + f_2(5 - x_3)) = 28.5,\ x_3 = 5$$
$$f_3(2) = \min_{0 \leqslant x_3 \leqslant 6} (c_3(x_3) + h_2(2) + f_2(6 - x_3)) = 31,\ x_3 = 6$$

当 $k = 4$ 时，因要求第 4 时期之末的库存量为 0，即 $v_4 = 0$，故有

$$f_4(0) = \min_{0 \leqslant x_4 \leqslant \min(v_4+2,\ 6)} (c_4(x_4) + h_2(0) + f_3(2 - x_4)) = 32,\ x_4 = 0$$

于是，该问题的最优安排是 $x_1 = 5$，$x_2 = 0$，$x_3 = 6$，$x_4 = 0$。

由上述解可知，对每个 i 均存在 $v_{i-1}x_i = 0$，称该点的生产决策具有再生产点的性质，或重生性质。如果 $v_i = 0$，称 i 为再生产点(又称重生点)。假定 $v_0 = 0$，$v_n = 0$，阶段 i、n 为再生产点。如果此类问题的目标函数 $g(x)$ 在凸集合 S 上是凹函数(或凸函数)，则 $g(x)$ 在 S 的顶点上具有再生产点性质的最优策略。

令 $c(j, i)(j \leqslant i)$ 为阶段 j 到 i 的总成本，$j - 1$ 和 i 是再生产点，阶段 j 到 i 的所有产品全部由阶段 j 提供，则

$$c(j, i) = c_j\left(\sum_{s=j}^{i} d_s\right) + \sum_{s=j+1}^{i} c_s(0) + \sum_{s=j}^{i-1} h_s\left(\sum_{t=s+1}^{i} d_t\right)$$

设最优值函数 f_i 表示在阶段 i 末库存量 $v_i = 0$ 时，从阶段 1 到 i 的最小成本，则递推关系式可以表示为 $f_i = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant i} [f_{i-1} + c(j, i)] (i = 1, \cdots, n)$，边界条件为 $f_0 = 0$。求出 $f_1, \cdots, f_n$ 的最小值，倒推即可获得最优生产方案。

【例 7-8】用再生产点法求解【例 7-7】。

【解】计算 $c(j,i)(j\leqslant i)$，有 $c(1,1)=9$，$c(1,2)=15$，$c(1,3)=\infty$，$c(1,4)=\infty$，$c(2,2)=7$，$c(2,3)=18$，$c(2,4)=\infty$，$c(3,3)=11$，$c(3,4)=17$，$c(4,4)=7$。可得

$f_0=0$，$f_1=f_0+c(1,1)=9$，$f_2=\min(f_0+c(1,2),f_1+c(2,2))=15$

$f_3=\min(f_0+c(1,3),f_1+c(2,3),f_2+c(3,3))=26$

$f_4=\min(f_0+c(1,4),f_1+c(2,4),f_2+c(3,4),f_3+c(4,4))=32$

于是，倒推即可得到 $x_1=5$，$x_2=0$，$x_3=6$，$x_4=0$。

7.2.3 不确定性采购

采购管理中，存在随机性因素，状态转移不能完全确定，是按照某种已知的概率分布取值的，具有这种性质的多阶段决策过程称为随机性的决策过程。

【例 7-9】某厂在近五周内必须采购一批原料，估计在未来五周内价格有波动，其浮动价格分别是 500、600 和 700，相应的概率分别为 0.3、0.3 和 0.4。试求在哪一周以什么价格购入，可使其采购价格的数学期望值最小，并求出期望值。

【解】按照动态规划的思想，采购期限划分为五个阶段。令 y_k 表示第 k 周的实际价格，x_k 为决策变量，$x_k=1$ 表示第 k 周采购，$x_k=0$ 表示第 k 周等待；y_{kE} 表示第 k 周等待而以后才去最优决策时采购价格的期望值；$f_k(y_k)$ 表示第 k 周实际价格为 y_k 时，第 k 周至第 5 周才去最优决策所得的最小期望值，即

$$f_k(y_k)=\min\{y_k,y_{kE}\},\ y_k\in(500,600,700),\ k=1,2,3,4,5.\ f_5(y_k)=y_5$$

于是 $y_{kE}=0.3f_{k+1}(500)+0.3f_{k+1}(600)+0.4f_{k+1}(700)$。当 $f_k(y_k)=y_k$ 时，$x_k=1$；反之，当 $f_k(y_k)=y_{kE}$ 时，$x_k=0$。

当 $k=5$ 时，$f_5(500)=500$，$f_5(600)=600$，$f_5(700)=700$，说明在第 5 周时，若所需的原料尚未买入，则无论市场价格如何都必须采购。

当 $k=4$ 时，$y_{4E}=0.3f_5(500)+0.3f_5(600)+0.4f_5(700)=610$，则 $f_4(y_4)=\min\{y_k,610\}$。

如果 $y_4=500$、600，则 $x_4=1$；否则 $y_4=700$，则 $x_4=0$。

当 $k=3$ 时，$y_{3E}=0.3(500+600)+0.4\times610=574$，则 $f_3(y_3)=\min\{y_3,574\}$。

如果 $y_3=500$，则 $x_3=1$；否则 $y_3=600$、700，则 $x_3=0$。

当 $k=2$ 时，$y_{2E}=0.3\times500+0.7\times574=551.8$，则 $f_2(y_2)=\min\{y_2,551.8\}$。

如果 $y_2=500$，则 $x_2=1$；否则 $y_2=600,700$，则 $x_2=0$。

当 $k=1$ 时，$y_{1E}=0.3\times500+0.7\times551.8=536.26$，则 $f_1(y_1)=\min\{y_2,536.26\}$。

如果 $y_1=500$，则 $x_1=1$；否则 $y_1=600$、700，则 $x_1=0$。

因此，最优策略为：在第 1、2、3 周时，若价格为 500 就采购，否则应该等待；在第 4 周时，价格为 500 或 600 应采购，否则就等待；在第 5 周时，无论什么价格都要采购。此时，采购价格的数学期望值为 $0.3\times500+0.7\times536.26=525.382$。

7.2.4 背包问题

背包问题的表述是一个人背包上山，总质量限定为 a；有 n 种物品可以装入包中，第 i 种物品的质量为 w_i，上山过程中的价值是携带数量 x_i 的函数 $c_i(x_i)$。问此人应如何选择携带物品（各几件），使其所起作用（总价值）最大。类似的问题有工厂的下料、货物装载问题等。设 x_i 为第 i 种物品的装入件数，则问题的数学模型为

$$\max f = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i)$$

$$\text{s. t：}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leqslant a \\ x_i \geqslant 0 \text{ 为整数}\end{cases}$$

设 n 种物品划分为 n 个阶段，状态变量 w 表示用于装第 1 种物品至第 k 种物品的总质量，决策变量 x_k 表示第 k 种物品的件数，则状态转移方程为 $\tilde{w} = w - x_k w_k$ ，允许决策集合为 $D_k(w) = \left\{x_k 0 \leqslant x_k \leqslant \left(\frac{w}{w_k}\right)\right\}$。最优值函数 $f_k(w)$ 是当总质量不超过 w 、背包中可以装入第 1 种到第 k 种物品的最大使用价值，即

$$f_k(w) = \max_{\substack{\sum_{i=1}^{k} w_i x_i \leqslant w \\ x_i \geqslant 0 \text{且为整数}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)}} \sum_{i=1}^{k} c_i(x_i)$$

递推关系式为

$$f_1(w) = \max_{x_1 = 0,\ 1,\ \cdots,\ (w/w_1)} c_1(x_1)\ ,\ f_k(w) = \max_{x_k = 0,\ 1,\ \cdots,\ (w/w_k)} \{c_k(x_k) + f_{k-1}(w - w_k x_k)\},\ 2 \leqslant k \leqslant n$$

由 $f_1(w)$，$f_2(w)$，…，$f_n(w)$ 及相应的决策函数 x_1，…，x_n ，最后得出的 $f_n(a)$ 就是所求的最大价值，其相应的最优策略由反推运算即可得出。

【例 7-10】 计算下列线性规划问题的最优解：

$$\max f = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

$$\text{s. t：}\begin{cases}3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 10 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0,\ \text{为整数}\end{cases}$$

【解】 由于含有三个变量，故划分为三个阶段。于是有

$$f_3(10) = \max_{\substack{3x_1+4x_2+5x_3 \leqslant 10 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0,\ \text{为整数}}} \{4x_1 + 5x_2 + 6x_3\} = \max_{\substack{10-5x_3 \geqslant 0 \\ x_3 \geqslant 0,\ \text{为整数}}} \{6x_3 + \max_{\substack{3x_1+4x_2 \leqslant 10-5x_3 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0,\ \text{为整数}}} \{4x_1 + 5x_2\}\}$$

$$= \max_{x_3 = 0,\ 1,\ 2} \{6x_3 + f_2(10 - 5x_3)\} = \max\{0 + f_2(10),\ 6 + f_2(5),\ 12 + f_2(0)\}$$

其中，$f_2(10) = \max_{\substack{3x_1+4x_2 \leqslant 10 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \text{为整数}}} \{4x_1 + 5x_2\} = \max_{\substack{3x_1 \leqslant 10-4x_2 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \text{为整数}}} \{4x_1 + (5x_2)\}$

$$= \max_{\substack{10-4x_2 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0,\ \text{为整数}}} \{5x_2 + \max_{\substack{3x_1 \leqslant 10-4x_2 \\ x_1 \geqslant 0,\ \text{为整数}}} (4x_1)\} = \max\{f_1(10),\ 5 + f_1(10),\ 6 + f_1(2)\}$$

$$f_2(5) = \max_{\substack{3x_1+4x_2 \leqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \text{为整数}}} \{4x_1 + 5x_2\} = \max_{x_2 = 0,\ 1} \{5x_2 + f_1(5 - 4x_2)\} = \max\{f_1(5),\ 5 + f_1(1)\}$$

$$f_2(0) = \max_{\substack{3x_1+4x_2 \leqslant 0 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \text{为整数}}} \{4x_1 + 5x_2\} = \max_{x_2 = 0} \{5x_2 + f_1(0 - 4x_2)\} = f_1(0)$$

$f_1(w) = \max_{\substack{3x_1 \leqslant w \\ x_1 \geqslant 0,\ \text{为整数}}} (4x_1) = 4 \times$（不超过 $w/3$ 的最大整数），最优决策为 $x_1 = (w/3)$，于是有

$$f_1(10) = 4 \times 3 = 12,\ x_1 = 3\ ;\ f_1(6) = 4 \times 2 = 8,\ x_1 = 2;$$

$$f_1(5) = 4 \times 1 = 4,\ x_1 = 1\ ;\ f_1(2) = 4 \times 0 = 0,\ x_1 = 0;$$

$$f_1(1) = 4 \times 0 = 0,\ x_1 = 0\ ;\ f_1(0) = 4 \times 0 = 0,\ x_1 = 0;$$

$$f_2(10) = \max\{f_1(10),\ 5 + f_1(6),\ 10 + f_2(0)\} = \max\{12,\ 5 + 8,\ 10 + 0\} = 13(x_1 = 2,\ x_2 = 1);$$

$f_2(5) = \max\{f_1(5), 5 + f_1(1)\} = \max\{4, 5 + 0\} = 5(x_1 = 0, x_2 = 1)$, $f_2(0) = f_1(0) = 0$ 。

故 $f_3(10) = \max\{f_2(10), 6 + f_2(5), 12 + f_2(0)\} = \max\{13, 6 + 5, 12 + 0\} = 13$ ，所以，最优装入方案为 $x_1^* = 2$，$x_2^* = 1$，$x_3^* = 0$ ，最大使用价值为 13 。

7.2.5 复合系统工作可靠性

某种机器的工作系统由 n 个部件串联组成，一个部件失灵就会造成整个系统不能工作，为提高系统工作的可靠性，在每一个部件上均装有主要部件的备用件。备用部件越多，系统正常工作的可靠性越大，但成本、质量、体积均相应加大，工作精度也降低。复合系统的可靠性问题就是考虑如何选择最少的备用部件的数量，使整个系统的工作可靠性最大。

假设部件 i 上安装有 x_i 个备用件，正常工作的概率为 $p_i(x_i)$ 。部件 i 的备件费用为 c_i ，质量为 w_i，如果总费用不超过 c ，总质量不超过 w ，于是其规划模型表示为

$$\max z = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i)$$

$$\text{s. t:} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leqslant c \\ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leqslant w \\ x_i \geqslant 0, \text{为整数}(i = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

令 y_i 是第 i 个到第 n 个部件所容许使用的总费用；z_i 是第 i 个到第 n 个部件所容许使用的总质量。其状态转移方程为 $y_{i+1} = y_i - c_i x_i$ ，$z_{i+1} = z_i - w_i x_i$ 。

允许决策集合为 $D_i(y_i, z_i) = \{x_i: 0 \leqslant x_i \leqslant \min[(y_i/c_i), (z_i/w_i)]\}$ 。

最优值函数 $f_i(y_i, z_i)$ 为由状态 y_i 和 z_i 出发，从部件 i 到部件 n 的系统的最大可靠性。其动态规划方程为

$$f_i(y_i, z_i) = \max_{x_i \in D_i(y_i, z_i)} [p_i(x_i) f_{i+1}(y_i - c_i x_i, z_i - w_i x_i)] (i = n, \cdots, 1), f_{n+1}(y_{n+1}, z_{n+1}) = 1$$

边界条件说明：$y_{n+1} = z_{n+1} = 0$ 时，系统根本不工作。

复合系统可靠性的目标函数是连乘积形式，也满足可分离性和递推关系。可靠性 $p_i(x_i)$ 是 x_i 的严格单调上升函数，而且 $p_i(x_i) \leqslant 1$ 。

【例 7-11】某种设备由三种元件 D_1、D_2、D_3 组成，其价格和可靠性见表 7-6。要求在设计中所使用元件的费用不超过 120 元。如何设计可使可靠性达到最大（不考虑质量的限制）？

表 7-6　元器件可靠性及价格表

元件	单价/元	可靠性
D_1	35	0.87
D_2	20	0.82
D_3	18	0.56

【解】令 x_i 是 D_i 元件上并联元件的个数，s_i 是在元件 D_i 至元件 D_3 的总费用，因此有

$$f_3(s_3) = \max_{1 \leqslant x_3 \leqslant (s_3/18)} (1 - 0.44^{x_3}), f_2(s_2) = \max_{1 \leqslant x_2 \leqslant (s_2/20)} (1 - 0.18^{x_2}) f_3(s_2 - 20x_2)$$

$$f_1(s_1) = \max_{1 \leqslant x_1 \leqslant (s_1/35)} (1 - 0.13^{x_1}) f_2(s_1 - 35x_1)$$

故 $f_1(120) = \max\limits_{1\leqslant x_1\leqslant 3}(1-0.13^{x_1})f_2(120-35x_1)$

$= \max\limits_{1\leqslant x_1\leqslant 3}[0.87f_2(85), 0.9831f_2(50), 0.997803f_2(15)]$

由于 $f_2(85) = \max\limits_{1\leqslant x_2\leqslant 4}(1-0.18^{x_2})f_3(85-20x_2)$

$= \max\limits_{1\leqslant x_2\leqslant 4}[0.82f_3(65), 0.9676f_3(45), 0.994168f_3(25), 0.99895f_3(5)]$

$f_2(50) = \max\limits_{1\leqslant x_2\leqslant 2}(1-0.18^{x_2})f_3(50-20x_2) = \max\limits_{1\leqslant x_2\leqslant 4}[0.82f_3(30), 0.9676f_3(10)]$

$f_2(15) = 0$

所以 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ 为最优方案。

7.2.6　排序问题

设有 n 个工件需要在机床 A、B 上加工，每个工件都必须经过先 A 后 B 两道加工工序。以 a_i, b_i 分别表示工件 $i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 在 A, B 上的加工时间。如何在两个机床上安排各工件加工顺序，使在机床 A 上加工第一个工件开始到在机床 B 上将最后一个工件加工完为止的加工总时间最少？

当工件加工顺序确定后，在 A 上加工时没有等待时间，而在 B 上则常常等待。因此，最优排序方案尽量减少在 B 上等待加工的时间。

令 X 表示在机床 A 上等待加工的按取定顺序排列的工件集合，x 表示不属于 X 的在 A 上最后加工完的工件，t 表示在 A 上加工完 x 的时刻算起到 B 上加工完 x 所需的时间。于是，在 A 上加工完一个工件之后，就有 (X, t) 与之对应。

令 $f(X, t)$ 为由状态 (X, t) 出发，对未加工的工件采取最优加工顺序后，将 X 中所有工件加工完所需时间。$f(X, t, i)$ 为由状态 (X, t) 出发，在 A 上加工工件 i，然后再对以后的加工工件采取最优顺序后，把 X 中工件全部加工完成所需要的时间。

令 $f(X, t, i, j)$ 为由状态 (X, t) 出发，在 A 上相继加工工件 i 与 j 后，对以后加工的工件采取最优顺序后，将 X 中的工件全部加工完所需的时间。因此有

$$f(X, t, i) = \begin{cases} a_i + f(X/i, t - a_i + b_i) & t \geqslant a_i \\ a_i + f(X/i, b_i) & t \leqslant a_i \end{cases}$$

令 $z_i(t) = \max(t - a_i, 0) + b_i$，于是 $f(X, t, i) = a_i + f[X/i, z_i(t)]$，其中 X/i 表示在集合 X 中去掉工件 i 后剩下的工件集合。

$f(X, t, i, j) = a_i + a_j + f[X/\{i.j\}, z_{ij}(t)]$，$z_{ij}(t)$ 是在机床 A 上从 X 出发相继加工工件 i、j，并从它将 j 加工完的时刻算起，至在 B 上相继加工工件 i、j 并将工件加工完所需的时间。机床 A 上加工 i、j 后由状态 (X, t) 转移到状态 $X/\{i.j\}$。于是可得

$$\begin{aligned} z_{ij}(t) &= \max[z_i(t) - a_j, 0] + b_j = \max[\max(t - a_i, 0) + b_i - a_j, 0] + b_j \\ &= \max[\max(t - a_i - a_j + b_i, b_i - a_j), 0] + b_j \\ &= \max(t - a_i - a_j + b_i + b_j, b_i + b_j - a_j, b_j) \end{aligned}$$

将 i、j 对调，则 $f(X, t, j, i) = a_i + a_j + f[X/\{i.j\}, z_{ij}(t)]$。此时有

$$z_{ji}(t) = \max(t - a_i - a_j + b_i + b_j, b_i + b_j - a_i, b_i)$$

因此，对任意 t，当 $z_{ij}(t) \leqslant z_{ji}(t)$ 时，工件 i 放在工件 j 之前加工可以使总的加工时间短些，即 $\max(b_i + b_j - a_j, b_j) \leqslant \max(b_i + b_j - a_i, b_i)$。于是有 $\max(-a_j, -b_i) \leqslant \max(-a_i, -b_j)$，可得 $\min(a_i, b_j) \leqslant \min(a_j, b_i)$。

基于此，排序问题的规则可以确定如下：

（1）根据工时矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$，找出最小的元素（如果有多个最小元素，可选择其中一个）。

（2）如果最小元素在第一排，则相应的工件应该排在最前的位置；如果在第二排，则应该排在最后的位置。

（3）将排定位置的工件所对应的列从 $\boldsymbol{M}$ 中划掉，然后对余下的工件重复上述步骤，直至把所有工件都排完为止。

【例 7-12】有五个工件，先要在车床上车削，然后在钻床上钻孔。已知各个工件在车床和钻床上的加工时间矩阵为 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 1.5 & 2.0 & 1.0 & 1.25 & 0.75 \\ 0.5 & 0.25 & 1.75 & 2.5 & 1.25 \end{pmatrix}$，试求使得加工完所有工件的加工时间最省的各个工件的加工顺序。

【解】基于上述规则，最优加工工序为 $5 \to 3 \to 4 \to 1 \to 2$，总加工时间为 7。

7.2.7 设备更新问题

设备更新问题主要指一种设备应该用多少年后进行更新最为恰当，即更新的最佳策略使在某一时间内的总收入达到最高或总支出达到最低。随着使用年限的增加，机器的使用效率降低，收入减少，维修费用增加，使用年限越长，价值就越小，更新时净支出费用就越多。

设备更新问题是以机器役龄作为状态变量的，决策是保留和更新两种。可推广到多维情形，如还考虑对使用的机器进行大修作为一种决策，那时所需的费用和收入，不仅取决于机龄和购置的年限，也取决于上次大修的时间，必须使用两个状态变量来描述系统的状态。

假设：$I_j(t)$ 为在第 j 年机器役龄为 t 年的一台机器运行所得的收入；$O_j(t)$ 为在第 j 年机器役龄为 t 年的一台机器所需的运行费用；$C_j(t)$ 为在第 j 年机器役龄为 t 年的一台机器更新时所需的净费用。α 是折扣因子（$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$），表示一年以后的单位收入的价值视为现年的 α 单位；T 是在第一年开始时，正在使用的机器的役龄；n 是计划的年限总数；$g_j(t)$ 是在第 j 年开始使用一台役龄为 t 年的机器时，从第 j 年至第 n 年内的最佳收入；$x_j(t)$ 是给出 $g_j(t)$ 时，在第 j 年开始时的决策（保留或更新）。

若第 j 年开始时购买了新机器，从第 j 年至第 n 年的总收入等于在第 j 年中由新机器获得的收入，减去在第 j 年中的运行费用，减去在第 j 年开始时役龄为 t 年的机器的更新净费用，加上在第 $j+1$ 年开始使用役龄为 1 年的机器从 $j+1$ 年至第 n 年的最佳收入。

若在第 j 年开始时继续使用役龄为 t 年的机器，从第 j 年至第 n 年的总收入应等于在第 j 年由役龄为 t 年的机器得到的收入，减去在第 j 年中役龄为 t 年的机器的运行费用，加上在第 $j+1$ 年开始使用役龄为 $t+1$ 年的机器从第 $j+1$ 年至第 n 年的最佳收入。递推关系式为

$$g_j(t)=\max\begin{bmatrix} \text{R：} I_j(0)-O_j(0)-C_j(t)+\alpha g_{j+1}(1) \\ \text{K：} I_j(t)-O_j(t)+\alpha g_{j+1}(t+1) \end{bmatrix}$$

边界条件 $\quad g_{n+1}(t)=0,\ (j=1,2,\cdots;\ nt=1,2,\cdots,j-1,j+T-1)$

其中，K 表示保留使用（keep）；R 表示更新机器（replacement）。

对 $g_1(.)$，允许的 t 值只能是 T，表明进入计划过程时，已经使用了 T 年。

【例 7-13】假设 $n = 5$，$\alpha = 1$，$T = 1$，试运用动态规划思想制定五年中的设备更新策略，使在五年内的总收入达到最大。其中，收入表示为 RE，运行费用表示为 OF，更新费用表示为 UF（见表 7-7）。

表 7-7　设备使用年限和费用表

机龄 \ 项目	第一年					第二年				第三年			第四年		第五年	期前				
	0	1	2	3	4	0	1	2	3	0	1	2	0	1	0	1	2	3	4	5
RE	22	21	20	18	16	27	25	24	22	29	26	24	30	28	32	18	16	16	14	14
OF	6	6	8	8	10	5	6	8	9	5	5	6	4	5	4	8	8	9	9	10
UF	27	29	32	34	37	29	31	34	36	31	32	33	32	33	34	32	34	36	36	38

【解】第 j 年开始机龄为 t 年的机器，年序为 $j-t$ 年。$I_5(0)$ 为第五年新产品收入，故 $I_5(0) = 32$；$I_3(2)$ 为第一年产品，其机龄为 2 年的收入 $[I_3(2) = 20]$；$C_5(1)$ 为第五年机龄 1 年的机器（应为第 4 年的产品）的更新费用，故 $C_5(1) = 33$。同理可得，$C_5(2) = 33$，$C_3(1) = 31$，$O_5(0) = 4$，$O_3(2) = 8$。

当 $j = 5$ 时，设 $T = 1$，机器使用了 1、2、3、4、5 年的递推关系式为

$$g_5(t) = \max\begin{bmatrix} \mathrm{R}:\ I_5(0) - O_5(0) + C_5(t) + 1 \cdot g_6(1) \\ \mathrm{K}:\ I_5(t) - O_5(t) + 1 \cdot g_6(t+1) \end{bmatrix}$$

因此，$g_5(1) = \max\begin{bmatrix} \mathrm{R}:\ 32 - 4 - 33 + 0 = -5 \\ \mathrm{K}:\ 28 - 5 + 0 = 23 \end{bmatrix} = 23$，所以 $x_5(1) = \mathrm{K}$。同理，$g_5(2) = 18$，$x_5(2) = \mathrm{K}$；$g_5(3) = 13$，$x_5(3) = \mathrm{K}$；$g_5(4) = 6$，$x_5(4) = \mathrm{K}$；$g_5(5) = 4$，$x_5(5) = \mathrm{K}$。

当 $j = 4$ 时，$g_4(t) = \max\begin{bmatrix} \mathrm{R}:\ I_4(0) - O_4(0) + C_4(t) + g_5(1) \\ \mathrm{K}:\ I_4(t) - O_4(t) + g_5(t+1) \end{bmatrix}$，故

$$g_4(1) = \max\begin{bmatrix} \mathrm{R}:\ 30 - 4 - 32 + 23 = 17 \\ \mathrm{K}:\ 26 - 5 + 18 = 39 \end{bmatrix} = 39$$

$x_4(1) = \mathrm{K}$，$g_4(2) = 29$，$x_4(2) = \mathrm{K}$；$g_4(3) = 16$，$x_4(3) = \mathrm{K}$；$g_4(4) = 13$，$x_4(4) = \mathrm{R}$。

当 $j = 3$ 时，$g_3(1) = 48$，$x_3(1) = \mathrm{K}$；$g_3(2) = 31$，$x_3(2) = \mathrm{R}$；$g_3(3) = 27$，$x_3(3) = \mathrm{R}$。

当 $j = 2$ 时，$g_2(1) = 46$，$x_2(1) = \mathrm{K}$；$g_2(2) = 36$，$x_2(2) = \mathrm{R}$。

当 $j = 1$ 时，$g_1(1) = 46$，$x_1(1) = \mathrm{K}$。

于是，第 1、2、3、4、5 年的最优策略分别是 K、R、K、K、K，机龄分别是 1、2、1、2、3，相应的最佳收益为 46 单位。

7.2.8　货郎担问题

货郎担问题指一个串村走户的卖货郎，从某个村庄出发，通过若干个村庄各一次且仅一次，最后回到原出发的村庄，问应如何选择行走路线，能使总的行程最短。类似的问题如物资运输路线中，汽车应走怎样的路线使路程最短；铺设管道的路线耗费最少等。

设有 n 个城市，d_{ij} 表示从 i 城到 j 城的距离。从城市 1 出发到其他每个城市去一次且仅一次，然后回到城市 1。如何选择行走的路线能使总的路程最短？

令 $N_i = \{2, 3, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n\}$ 表示由 1 城到 i 城的中间城市集合，S 表示到达 i 城之前所经过的城市的集合，则有 $S \subseteq N_i$。选取 (i, S) 作为描述过程的状态变量，最优值函数 $f_k(i, S)$ 为从 1 城开始经由 k 个中间城市 S 集到 i 城的最短路线的距离。动态规划的递推

关系为 $f_k(i, S) = \min\limits_{j \in S}[f_{k-1}(j, S/\{j\}) + d_{ji}]$（$k = 1, \cdots, n-1$；$i = 2, \cdots, n$；$S \subseteq N_i$）；边界条件为 $f_0(i, \phi) = d_{1i}$。$P_k(i, S)$ 为最优决策函数，它表示从 1 城开始经 k 个中间城市 S 集到 i 城的最短路线上紧挨着 i 城前面的那个城市。

【例 7-14】 推销员从 1 城出发，经过每个城市一次且仅一次，最后回到 1 城，怎样设计行走路线，可使总的行程距离最短？各个城市之间的距离见表 7-8。

表 7-8　各个城市之间的距离表

距离 j \ i	1	2	3	4
1	0	8	5	6
2	6	0	8	5
3	7	9	0	5
4	9	7	8	0

【解】 由边界条件可知，$f_0(2, \phi) = d_{12} = 8$，$f_0(3, \phi) = d_{13} = 5$，$f_0(4, \phi) = d_{14} = 6$。

当 $k = 1$ 时，即从 1 城开始，中间经过一个城市到达 i 城的最短距离是

$$f_1(2, \{3\}) = f_0(3, \phi) + d_{32} = 5 + 9 = 14$$

$$f_1(2, \{4\}) = f_0(4, \phi) + d_{42} = 6 + 7 = 13$$

$$f_1(3, \{2\}) = 8 + 8 = 16, f_1(3, \{4\}) = 6 + 8 = 14$$

$$f_1(4, \{2\}) = 8 + 5 = 13, f_1(4, \{3\}) = 5 + 5 = 10$$

当 $k = 2$ 时，即从 1 城开始，中间经过两个城市到达 i 城的最短距离是

$$\begin{aligned} f_2(2, \{3, 4\}) &= \min[f_1(3, \{4\}) + d_{32}, f_1(4, \{3\}) + d_{42}] \\ &= \min[14 + 9, 10 + 7] = 17 \end{aligned}$$

所以 $p_2(2, \{3, 4\}) = 4$。

$$f_2(3, \{2, 4\}) = \min[13 + 8, 13 + 8] = 21$$

所以 $p_2(3, \{2, 4\}) = 2$ 或 4。

$$f_2(4, \{2, 3\}) = \min[14 + 5, 16 + 5] = 19$$

所以 $p_2(4, \{2, 3\}) = 2$。

当 $k = 3$ 时，即从 1 城开始，中间经过三个城市回到 1 城的最短距离是

$$\begin{aligned} f_3(1, \{2, 3, 4\}) &= \min[f_2(2, \{3, 4\}) + d_{21}, f_2(3, \{2, 4\}) + d_{31}, f_2(4, \{2, 3\}) + d_{41}] \\ &= \min[17 + 6, 21 + 7, 19 + 9] = 23 \end{aligned}$$

所以 $p_3(1, \{2, 3, 4\}) = 2$。

最短旅行路线是 $1 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$，最短距离为 23。

本章要点

动态规划中的基本要素也即基本概念，包括阶段、状态、决策、策略、状态转移方程和指标函数和最优值函数，这些是动态规划建模的基础知识。

动态规划的基本方程，是解决动态规划问题建模的基本依据，包括动态规划逆序解法的基本方程和顺序解法的基本方程两种。

动态规划的最优性定理，与动态规划的基本方程一样，是动态规划的理论基础。

动态规划的应用是本章的重点，需要合理建立动态规划模型并加以求解。

关键公式

- 动态规划基本方程

$$f_k(s_k) = \underset{u_k \in D_k(s_k)}{\text{opt}} \{v_k[s_k, u_k(s_k)] + f_{k+1}[u_k(s_k)]\} (k = n, n-1, \cdots, 1)$$

- 动态规划最优性定理

$$V_{0,n-1}(s_0, p_{0,n-1}^*) = \underset{p_{0,k-1} \in P_{0,k-1}(s_0)}{\text{opt}} \{V_{0,k-1}(s_0, p_{0,k-1}) + \underset{p_{k,n-1} \in P_{k,n-1}(\tilde{s}_k)}{\text{opt}} V_{k,n-1}(\tilde{s}_k, p_{k,n-1})\}$$

练习题

1. 分别用顺推解法和逆推解法求解下列问题：

（1）$\max z = 5x_1 + 4x_2 + 7x_3$

$$\text{s.t:} \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leqslant 10 \\ x_i \geqslant 0 \text{ 且为整数}(i = 1, 2, 3) \end{cases};$$

（2）$\max z = \prod_{i=1}^{3} i \cdot x_i$

$$\text{s.t:} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leqslant 12 \\ x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{cases};$$

（3）$\max z = 7x_1^2 + 5x_1 + 4x_2^2$

$$\text{s.t:} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 10 \\ x_1 - 3x_2 \leqslant 9 \\ x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2) \end{cases}。$$

2. 某公司现有 500 万元的投资资金，计划在 3 年内使用。已知该公司在 1 年内使用 a 万元资金可获得 $0.4a$ 万元的效益；公司没有使用的现款可投资于其他部门，且可获得 10% 的年利率。为使公司获得最大的效益，这 500 万元的资金应如何使用？

3. 某服装厂预测未来四个时期衣服的需求量，预测值见表 7-9。

表 7-9　需 求 量 表

时期	1	2	3	4
需求量/千件	4	2	3	1

已知服装厂生产一件衣服的成本为 50 元，每个月的生产运营成本为 3 万元，且本时期生产的衣服延至以后销售的每件成本变为 80 元。假定第一个时期的初始库存量为 0，第四个时期之末的库存量也为 0。试确定在满足每月需求的前提下，使总成本最低的生产计划。

4. 某公司有 4 名销售人员要分配到 3 个销售点去，如果 m 个销售人员分配到第 n 个销售点时，每月所得利润见表 7-10。

表 7-10　利　润　表

销售点 n	人数 m				
	0	1	2	3	4
1	0	15	20	28	33
2	0	10	14	22	24
3	0	12	18	21	26

该公司应如何分配这 4 位销售人员可以使其所获利润最大？

5. 试制定五年中的一台机器更新策略，使总收入达到最大。设 $\alpha = 1$，$T = 2$，收入和费用见表 7-11。其中，RE 表示收入，OF 表示运行费用，UF 表示更新费用。

表 7-11　收入和费用表

年序 / 机龄 / 项目	第一年					第二年				第三年			第四年		第五年	期前				
	0	1	2	3	4	0	1	2	3	0	1	2	0	1	0	1	2	3	4	5
RE	20	19	18	16	14	25	23	22	20	27	24	22	28	26	30	16	14	14	12	12
OF	4	4	6	6	8	3	4	6	7	3	3	4	2	3	2	6	6	7	7	8
UF	25	27	30	32	35	27	29	32	34	29	30	31	30	31	32	30	32	34	34	36

6. 已知 4 个城市间的距离（见表 7-12），求从 V_1 出发，经过其余每个城市一次且仅一次，最后返回 V_1 的最短路径和距离。

表 7-12　城市之间的距离表

距离 i / j	1	2	3	4
1	0	6	7	9
2	8	0	9	7
3	5	8	0	8
4	6	5	5	0

第 8 章　图与网络分析

本章概要

学习目标　学完本章后，你将能够：

1. 了解图与树的基本定义与性质。
2. 掌握最短路的 Dijkstra 算法和最大流的标号算法，能够熟练应用。
3. 掌握网络计划相关的计算。

图与网络分析引例

Seervada 公园只允许限定数量的观光者和背包者徒步旅行，小轿车不允许进入公园，但是公园看守员可以在一个狭窄的弯曲道路上开电动车或吉普车。这条道路(不包括转弯)如图 8-1 所示。点 O 表示公园入口，其他字母表示看守站点所在位置，线上的数字表示道路的长度。公园在位置 T 处有一个景色优美的奇观。一些有轨电车在入口和位置 T 之间运送游客。

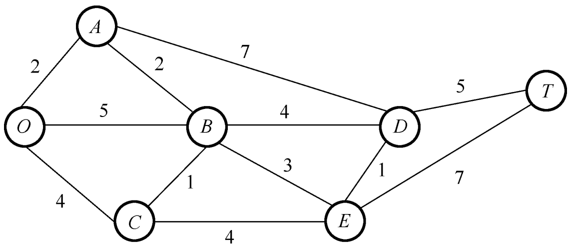


图 8-1　道路及相关距离图

当前公园管理面临三个问题。

第一个问题：在入口选择哪条路到达位置 T 距离最短。

第二个问题：需要在所有的站点安装电话线路来保证通信联系(包括公园的入口)。因为安装线很贵而且在自然条件下容易破裂，电话线要在道路下面安装并保证每两点之间都能够联系。在哪里安置电话线可使总路线最短。

第三个问题：车辆的调整。由于在公园旅游旺季时有更多的人想要从公园入口坐电车到 T 站，为了尽量避免干扰公园的生态和野生动物，每天每条路都被严格地规定允许行驶的车辆数目(不同的路上有不同的限制)。因此，在旺季每天不同路线所能够增加的车次与距离的远近无关。这个问题也就是如何在不破坏每条路的限制条件下调整不同路上发出的车次，以使公园发车的次数最多。

8.1　图　和　树

图论是应用十分广泛的运筹学分支，它已广泛地应用在物理学、化学、控制论、信息论、科学管理、电子计算机等各个领域。在生产和科学研究中，有很多问题可以用图论的理论和方法来解决。例如，在组织生产中，为完成某项生产任务，各工序之间怎样衔接，才能使生产任务完成得既快又好；一个邮递员送信，要走完他负责投递的全部街道，完成任务后回到邮局，应该按照怎样的路线走，所走的路程最短；各种通信网络的合理架设；交通网络的合理分布等问题，应用图论的方法求解都很简便。

8.1.1　图的基本概念

图是日常生活中最常见的表示方式。图由点和线组成，点表示研究对象，线表示研究对象之间特定的关系。例如，图 8-2 中，点 v_1，v_2，v_3，v_4，v_5 分别表示企业的五个职能部门，连线表示相关部门之间存在信息交互关系；图 8-3 中，点 v_1，v_2，v_3，v_4，v_5，v_6，v_7，v_8 分别代表

仓库中的八种产品，连线表示其连接的两种产品能存放在一起，没有连线的表示不能存放在一起。

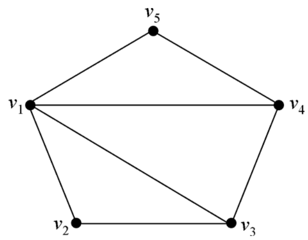


图 8-2　职能部门联系

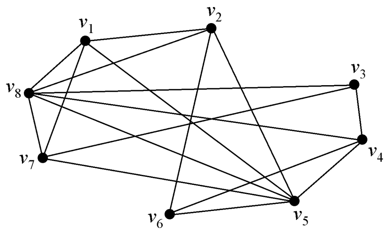


图 8-3　产品存储联系

上述两个例子中，对象之间的“关系”具有“对称性”，即如果甲与乙有关系，那么乙与甲也有这种关系。但现实中，某些关系并不具备对称性，如比赛胜负关系等。例如，球队 v_1 胜了球队 v_2，可以从 v_1 引一条带箭头的连线到 v_2，如图 8-4 所示。

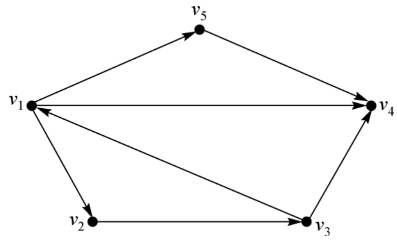


图 8-4　比赛胜负关系

图是反映对象之间关系的一种工具，图中点的相对位置如何、点与点之间连线的长短曲直，对于反映对象之间的关系并不重要。下面给出图的一些定义：

(1) 边是两点之间不带箭头的连线；弧是两点之间带箭头的连线。

(2) 点和边构成的图为无向图，记为 $G=(V,E)$，V、E 分别是 G 的点集合和边集合。一条连接点 $v_i, v_j \in V$ 的边记为 $[v_i, v_j]$（或 $[v_j, v_i]$）。点及弧所构成的图为有向图，记为 $D=(V,A)$，V、A 分别表示 D 的点集合和弧集合。一条从 v_i 指向 v_j 的弧记为 (v_i, v_j)。图 G 或 D 中的点数记为 $p(G)$ 或 $p(D)$，边（弧）数记为 $q(G)$（$q(D)$），也可简记为 p，q。

(3) 无向图 $G=(V,E)$ 中，如果边 $e=[u,v]\in E$，则称 u、v 是 e 的端点，也称 u、v 是相邻的；称 e 是点 u（及点 v）的关联边。

(4) 在图 G 中，某个边 e 的两个端点相同，则称 e 是环；若两个点之间有多于一条的边，称这些边为多重边。一个无环无多重边的图称为简单图；一个无环但允许有多重边的图称为多重图。

(5) 以点 v 为端点的边的个数称为 v 的次，记为 $d_G(v)$ 或 $d(v)$。次为奇数的点，称为奇点，否则称为偶点。次为 1 的点称为悬挂点，悬挂点的关联边为悬挂边；次为零的点称为孤立点。

(6) 图 $G=(V,E)$ 中，一个点、边的交错序列 $(v_{i_1}, e_{i_1}, v_{i_2}, e_{i_2}, \cdots, v_{i_{k-1}}, e_{i_{k-1}}, v_{i_k})$，如果满足 $e_{i_t}=[v_{i_t}, v_{i_{t+1}}]$ $(t=1,2,\cdots,k-1)$，则称为一条连接 v_{i_1} 和 v_{i_k} 的链，记为 $(v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k})$，称点 $v_{i_2}, v_{i_3}, \cdots, v_{i_{k-1}}$ 为链的中间点。

(7) 链 $(v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k})$ 中，若 $v_{i_1}=v_{i_k}$，则称为一个圈，记为 $(v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_{k-1}}, v_{i_1})$；若点 $v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}$ 都是不同的，则称为初等链；如果圈 $(v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_{k-1}}, v_{i_1})$ 中，$v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_{k-1}}$ 都是不同的，称为初等圈；若链（圈）中含的边均不相同，称为简单圈。

(8) 图 G 中，若任何两点之间，至少有一条链，则称 G 是连通图，否则称为不连通图。若 G 是不连通图，它的每个连通的部分称为 G 的一个连通分图（简称分图）。

(9)对给定的图 $G=(V,E)$，如果图 $G'=(V',E')$ 使 $V=V'$ 及 $E'\subseteq E$，则称 G' 是 G 的一个支撑子图。设 $v\in V(G)$，用 $G-v$ 表示从图 G 中去掉点 v 及 v 的关联边后得到的图。

(10)对有向图 $D=(V,A)$，从 D 中去掉所有弧上的箭头，就得到一个无向图，称为 D 的基础图，记为 $G(D)$。D 中的一条弧 $a=(u,v)$，称 u 为 a 的始点，v 为 a 的终点，称弧 a 是从 u 指向 v 的。

(11)设 $(v_{i_1},a_{i_1},v_{i_2},a_{i_2},\cdots,v_{i_{k-1}},a_{i_{k-1}},v_{i_k})$ 是 D 中的一个点弧交错序列，如果这个序列在基础图 $G(D)$ 中所对应的点边序列是一条链，则称这个点弧交错序列是 D 的一条链，类似定义圈和初等链(圈)。如果 $(v_{i_1},a_{i_1},v_{i_2},a_{i_2},\cdots,v_{i_{k-1}},a_{i_{k-1}},v_{i_k})$ 是 D 中的一条链，并且对 $t=1,2,\cdots,k-1$，均有 $a_{i_t}=(v_{i_t},v_{i_{t+1}})$，称之为从 v_{i_1} 到 v_{i_k} 的一条路。若路的第一个点和最后一个点相同，则称为回路，类似定义初等路(回路)。

【例8-1】有甲、乙、丙、丁、戊、己六名运动员报名参加 A、B、C、D、E、F 六个项目的比赛。已知甲参加 B、E 两个项目，乙参加 A、D 两个项目，丙参加 B、F 两个项目，丁参加 A、C、E 三个项目，戊参加 D、F 两个项目，己参加 B、D 两个项目。如何安排六个项目的比赛顺序，才能使每名运动员不连续地参加两项比赛？

【解】把比赛项目作为研究对象，用点来表示。如果两个项目没有同一名运动员参加，则它们在比赛顺序上可排在一起，相应地，在这两个项目之间连一条边，如图 8-5 所示。

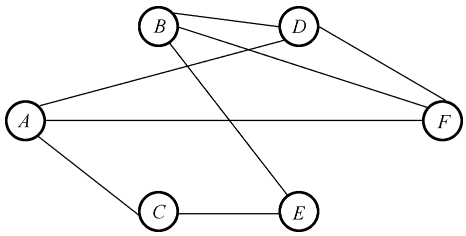


图 8-5　比赛关系图

于是，可找到一种安排，如 $A\rightarrow B\rightarrow C\rightarrow D\rightarrow E\rightarrow F$。

8.1.2　树的基本概念

一个无圈的连通图称为树。树通常具有如下特性(证明过程见附录 C)：

(1)图 $G=(V,E)$ 是一个树，$p(G)\geqslant 2$，则 G 中至少有两个悬挂点。

(2)图 $G=(V,E)$ 是一个树的充分必要条件是 G 不含圈，且恰有 $p-1$ 条边。

(3)图 $G=(V,E)$ 是一个树的充分必要条件是 G 是连通图，并且 $q(G)=p(G)-1$。

(4)图 G 是树的充分必要条件是任意两个顶点之间恰有一条链。

设图 $T=(V,E')$ 是图 $G=(V,E)$ 的支撑子图，如果图 $T=(V,E')$ 是一个树，则称 T 是 G 的一个支撑树。图 G 有支撑树的充分必要条件是图 G 是连通的。

对图 $G=(V,E)$，对每一条边 $[v_i,v_j]$ 都有一个数 w_{ij}，则称图 G 为赋权图，w_{ij} 称为 $[v_i,v_j]$ 上的权。权是指与边有关的数量指标，如距离、时间、费用等。

如果 $T=(V,E')$ 是 G 的一个支撑树，称 E' 中所有边的权之和为支撑树 T 的权，记为 $w(T)$，即 $w(T)=\sum\limits_{[v_i,v_j]\in T}w_{ij}$。如果支撑树 T^* 的权 $w(T^*)$ 是 G 的所有支撑树的权中最小者，则称 T^* 是 G 的最小支撑树，即 $w(T^*)=\min\limits_{T}w(T)$，式中对 G 的所有支撑树 T 取最小。

最小支撑树的求法一般分为两种，即避圈法和破圈法。

1. 避圈法

开始选一条最小权的边，在以后每一步中，总选择与已选边不构成圈的那些边，且这些边的权应该是最小的(如果有两条或两条以上的边都是权最小的边，则从中任选一条)。

算法的具体步骤如下：

(1)令 $i = 1$，$E_0 = \varnothing$，($\varnothing$表示空集)。

(2)选一条边 $e_i \in E/E_{i-1}$，使 e_i 是使 $(V, E_{i-1} \cup \{e\})$ 不含圈的所有边 $e(e \in E/E_{i-1})$ 中权最小的边。令 $E_i = E_{i-1} \cup \{e\}$，如果这样的边不存在，则 $T = (V, E_{i-1})$ 是最小树。

(3)把 i 换成 $i+1$，转入第(2)步。

2. 破圈法

任取一个圈，从圈中去掉一条权最大的边(如果有两条或两条以上的边都是权最大的边，则任意去掉其中一条)。在余下的图中，重复这个步骤，直至得到一个不含圈的图为止，这时的图便是最小树。

【例 8-2】已知八口海上油井相互间距离(见表 8-1)，且 1 号井离海岸最近，为 5。从海岸经 1 号井铺设油管将各油井连接起来，应如何铺设可使输油管长度为最短?

表 8-1　各油井之间的距离表

从＼到	2	3	4	5	6	7	8
1	1.3	2.1	0.9	0.7	1.8	2.0	1.5
2		0.9	1.8	1.2	2.6	2.3	1.1
3			2.6	1.7	2.5	1.9	1.0
4				0.7	1.6	1.5	0.9
5					0.9	1.1	0.8
6						0.6	1.0
7							0.5

【解】如果采用避圈法求解，则主要过程描述如下：

(1)令 $i = 1$，$E_0 = \varnothing$。

(2)最小边 e_1 为 [7, 8]，长度为 0.5。

(3)接着令 $i = 2$，余下的最小边 e_2 为 [6, 7]，长度为 0.6。

令 $i = 3$，余下最小边 e_3 为 [1, 5] 和 [4, 5]，长度为 0.7，与边 [7, 8] 和 [6, 7] 不会组成圈。

令 $i = 4$，余下的最小边 e_4 为 [5, 8]，长度为 0.8，与上述边也不会形成圈。

令 $i = 5$，余下的最小边 e_5 为 [1, 4]、[4, 8] 和 [2, 3]，长度为 0.9，但 [1, 4] 和 [4, 8] 与上述边能够形成圈，舍弃，而边 [2, 3] 和上述边不会形成圈，故保留。

令 $i = 6$，余下的最小边 e_6 为 [3, 8] 和 [6, 8]，长度为 1.0，其中 [6, 8] 会和上述边形成圈，故舍弃，而 [3, 8] 不会和上述边形成圈，故保留。

此时，边为 7 条，为点数减去 1，于是，已经找到最小支撑树。

(4)最小支撑树如图 8-6 所示。

如果采用破圈法，则首先找到任意圈，如圈 (1, [1, 2], 2, [2, 8], 8, [8, 1], 1)，其最大权值为 1.5，故删除边 [8, 1]；接着再任意找圈，如 (1, [1, 2], 2, [2, 8], 3, [3, 1],

1），最大值为 2.1，故删除边［3，1］；依此类推，直到找到 7 条边为止。得到的结果和图 8-6 相同。

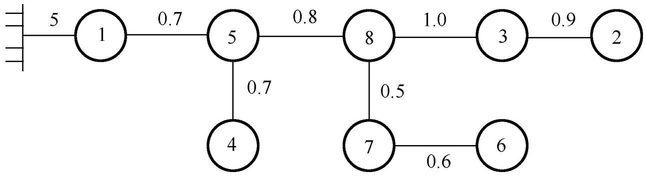


图 8-6　最小支撑树

当然，在很多支撑树求解过程中，得到的支撑树图可能不同，即可能存在多个最小支撑树，但是其权之和肯定是相同的。

8.2　图论应用

最短路问题是重要的最优化问题之一，它不仅可以直接应用于解决生产实际中的许多问题，如管道铺设、线路安排、厂区布局、设备更新等，而且经常被作为一个基本工具，用于解决其他优化问题。

8.2.1　最短路问题

对赋权有向图 $D=(V, A)$，弧 $a=(v_i, v_j)$ 的权为 $w(a)=w_{ij}$。设 P 是 D 中从顶点 v_s 到顶点 v_t 的一条路，路 P 的权 $w(P)$ 是 P 中所有弧的权之和。最短路问题就是在所有从 v_s 到 v_t 的路中求一条权最小的路 P_0，即 $w(P_0)=\min\limits_P w(P)$，路 P_0 的权称为从 v_s 到 v_t 的距离，记为 $d(v_s, v_t)$，此时 $d(v_s, v_t)$ 与 $d(v_t, v_s)$ 未必相等。

最短路的主要计算方法是 Dijkstra 算法，其基本思想是：从 v_s 出发，逐步地向外探寻最短路。运算过程中，与每个点对应，记录下一个数(称为这个点的标号)，表示从 v_s 到该点的最短路的权(称为 P 标号)，或者是从 v_s 到该点的最短路的权的上界(称为 T 标号)，每一步去修改 T 标号，并且把某一个具 T 标号的点改变为具 P 标号的点，使 D 中具 P 标号的顶点数多一个，至多经过 $p-1$ 步，可求出从 v_s 到各点的最短路。

给定赋权有向图 $D=(V, A)$，S_i 表示当前所有 P 标号点集合，k 为最新的 P 标号点下标，算法的具体步骤如下。

开始 $(i=0)$，令 $S_0=\{v_s\}$，$P(v_s)=0$；$\lambda(v_s)=0$，对每一个 $v\neq v_s$，令 $T(v)=+\infty$，$\lambda(v)=M$，令 $k=s$。

(1)如果 $S_i=V$，算法终止，对每个 $v\in S_i$，$d(v_s, v)=P(v)$，否则转至(2)。

(2)考察每个使 $(v_k, v_j)\in A$ 且 $v_j\notin S_i$ 的点 v_j。如果 $T(v_j)>P(v_k)+w_{kj}$，则把 $T(v_j)$ 修改为 $P(v_k)+w_{kj}$，把 $\lambda(v_j)$ 修改为 k，否则转至(3)。

(3)令 $T(v_{j_i})=\min\limits_{v_j\notin S_i}\{T(v_j)\}$。如果 $T(v_{j_i})<+\infty$，则把 v_{j_i} 的 T 标号变为 P 标号 $P(v_{j_i})=T(v_{j_i})$，令 $S_{i+1}=S_i\cup\{v_{j_i}\}$，$k=j_i$，把 i 换成 $i+1$，转至(1)，否则终止。对每一个 $v\in S_i$，$d(v_s, v)=P(v)$，而对每一个 $v\notin S_i$，$d(v_s, v)=T(v)$。

【例 8-3】(设备更新决策)某台机器可以连续工作四年，也可每年末卖掉换一台新的。各年初购置一台新机器的价格及不同役龄机器年末的处理价见表 8-2。新机器第一年运行及维

修费为 0.3 万元，使用 1 ~3 年后机器每年的运行及维修费用分别为 0.8 万元、1.5 万元、2.0 万元。确定该机器的最优更新策略，使四年内用于更换、购买及运行维修的总费用最低。

表 8-2　机器购置和处理费用表　（单位：万元）

j	第一年	第二年	第三年	第四年
年初购置价	2.5	2.6	2.8	3.1
使用了 j 年的机器处理价	2.0	1.6	1.3	1.1

【解】可以将机器更新决策问题化简为求最短路问题，v_i 表示每年年初购进新设备。机器更新费用图如图 8-7 所示。

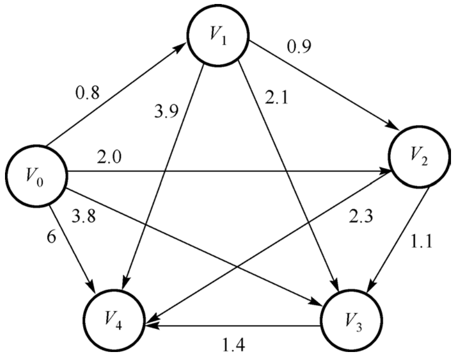


图 8-7　机器更新费用图

应用 Dijkstra 算法的主要步骤如下：

(1) 令 $P(v_0)=0$，$T(v_j)=\infty \quad (j=1,2,3,4)$。

(2) 有四条以 v_0 为始点弧，因此

$T(v_1)=\min[T(v_1),P(v_0)+w_{01}]=0.8$，$T(v_2)=\min[T(v_2),P(v_0)+w_{02}]=2.0$

$T(v_3)=\min[T(v_3),P(v_0)+w_{03}]=3.8$，$T(v_4)=\min[T(v_4),P(v_0)+w_{04}]=6.0$

由于 $\min\limits_{j=1,2,3,4}\{T(v_j)\}=0.8=T(v_1)$，故将 v_1 的 T 标号修改为 P 标号，即 $P(v_1)=0.8$，$\lambda(v_1)=0$。

(3) 检验以 v_1 为始点的弧，其终点为 v_2，v_3，v_4，因此这三个点相应的 T 标号值变化为

$T(v_2)=\min[T(v_2),P(v_1)+w_{12}]=1.7$，$T(v_3)=\min[T(v_3),P(v_0)+w_{13}]=2.9$

$T(v_4)=\min[T(v_4),P(v_0)+w_{14}]=4.7$

其最小值为 1.7，故 P 标号点 v_2，$P(v_2)=1.7$，$\lambda(v_2)=1$。

(4) 以 v_2 为始点的弧的终点有 v_3、v_4，这两个点相应的 T 标号值变化为

$T(v_3)=\min[T(v_3),P(v_2)+w_{23}]=2.9$，$T(v_4)=\min[T(v_4),P(v_2)+w_{24}]=4.0$

此时，最小值为 2.9，得到 P 标号点 v_3，即 $P(v_3)=2.9$，$\lambda(v_3)=1$。

(5) 以 v_3 为始点的弧只有一条，故 $P(v_4)=4$，$\lambda(v_4)=2$。

于是，起点到终点的最短路为 $v_0\to v_1\to v_2\to v_4$，最优更新策略为第 1、第 2 年末都换一台新机器，到第 4 年末都卖掉，总费用为 4.0 万元。

8.2.2　最大网络流问题

图 8-8 所示是连接产地 v_1 和销地 v_6 的交通网，每个弧 (v_i,v_j) 代表从 v_i 到 v_j 的运输线，产品经这些弧由 v_i 输送到 v_j，弧旁的数字表示这条运输线的最大通过能力。制定一个运输方案使从 v_1 运到 v_6 的产品数量最多。

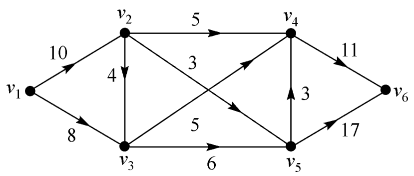


图 8-8 网络流量图

类似上述问题就称为网络最大流问题，即从起点到终点，经过网络的最大流量为多少。下面介绍一些关于网络最大流的相关概念。

(1)给一个有向图 $D=(V, A)$，发点即起点为 v_s，收点即终点为 v_t，其余的点叫作中间点。对于每个弧 $(v_i, v_j)\in A$，对应一个 $c(v_i, v_j)\geqslant 0$（或简称为 c_{ij}），称为弧的容量。这样的有向图也可以称为网络图 $D=(V, A, C)$。

(2)流量是定义在弧集合 A 上的一个函数 $f=\{f(v_i, v_j)\}$，并称 $f(v_i, v_j)$ 为弧 (v_i, v_j) 上的流量(简记作 f_{ij})。

(3)可行流是指每个弧上的流量不能超过该弧的最大通过能力(即弧的容量)，且中间点的容量为零。容量限制要求对每一弧 $(v_i, v_j)\in A$，$0\leqslant f_{ij}\leqslant c_{ij}$，平衡条件是：

①对中间点，流出量等于流入量，即对每个 $i(i\neq s, t)$ 有 $\sum\limits_{(v_i, v_j)\in A} f_{ij}-\sum\limits_{(v_j, v_i)\in A} f_{ji}=0$。

②对于发点 v_s，记 $\sum\limits_{(v_s, v_j)\in A} f_{sj}-\sum\limits_{(v_j, v_s)\in A} f_{js}=v(f)$。

③对于收点 v_t，记 $\sum\limits_{(v_t, v_j)\in A} f_{tj}-\sum\limits_{(v_j, v_t)\in A} f_{jt}=-v(f)$。

$v(f)$ 称为这个可行流的流量，即发点的净输出量(或收点的净输入量)。

(4)最大流问题就是求一个流 $\{f_{ij}\}$ 使其流量 $v(f)$ 达到最大，并且满足

$$\sum f_{ij}-\sum f_{ji}=\begin{cases} v(f)\ (i=s) \\ 0\ (i\neq s, t),\ 0\leqslant f_{ij}\leqslant c_{ij},\ (v_t, v_j)\in A \\ -v(f)\ (i=t) \end{cases}$$

(5)对可行流 $f=\{f_{ij}\}$，$f_{ij}=c_{ij}$ 的弧称为饱和弧；$f_{ij}<c_{ij}$ 的弧称为非饱和弧；$f_{ij}=0$ 的弧称为零流弧；$f_{ij}>0$ 的弧称为非零流弧。

(6)若 μ 是网络中连接发点 v_s 和收点 v_t 的一条链，定义链的方向是从 v_s 到 v_t，则链上的弧被分为两类：一类是弧的方向与链的方向一致，即前向弧，前向弧的全体记为 μ^+；另一类弧与链的方向相反，称为后向弧，后向弧的全体记为 μ^-。

(7)设 f 是一个可行流，μ 是从 v_s 到 v_t 的一条链，若 μ 满足：在弧 $(v_i, v_j)\in\mu^+$ 上，$0\leqslant f_{ij}\leqslant c_{ij}$，即 μ^+ 中每一弧是非饱和弧；在弧 $(v_i, v_j)\in\mu^-$ 上，$0\leqslant f_{ij}\leqslant c_{ij}$，即 μ^- 中每一弧是非零流弧，则称之为(关于可行流 f 的)增广链。

(8)设 S, $T\subset V$, $S\cap T=\varnothing$，把始点在 S 中、终点在 T 中所有弧构成的集合，记为(S, T)。

(9)对 $D=(V, A, C)$，若点集 V 被剖分为两个非空集合 V_1 和 $\overline{V}_1$，使 $v_s\in V_1$，$v_t\in\overline{V}_1$，则把弧集 $(V_1, \overline{V}_1)$ 称为(分离 v_s 和 v_t 的)截集。

(10)截集 $(V_1, \overline{V}_1)$ 中所有弧的容量之和称为截集的容量(简称为截量)，记为 $c(V_1, \overline{V}_1)$，即 $c(V_1, \overline{V}_1)=\sum\limits_{(v_i, v_j)(V_1, \overline{V}_1)} c_{ij}$。对可行流 f^*，网络中有截集 $(V_1^*, \overline{V}_1^*)$，使 $v(f^*)=c(V_1^*, \overline{V}_1^*)$，则 f^* 必是最大流，而 $(V_1^*, \overline{V}_1^*)$ 必定是 D 的所有截集中容量最小的一个，即最小截集。

(11)当且仅当不存在关于 f^* 的增广链时，可行流 f^* 是最大流。

从一个可行流出发(若没有给定 f，可设 f 是零流)，经过标号与调整过程可获得网络最

大流。在标号过程中，网络中的点或者是标号点（分为已检查和未检查两种），或者是未标号点。每个标号点的标号包含两部分：第一个标号表明它的标号是从哪一点得到的，以便找出增广链；第二个标号是为确定增广链的调整量 θ 用的。

标号过程开始，总先给 v_s 标上 $(0, +\infty)$，这时 v_s 是标号而未检查的点，其余都是未标号点。取一个标号而未检查的点 v_i，对一切未标号点 v_j，有

①若在弧 (v_i, v_j) 上，$f_{ij} < c_{ij}$，则给 v_j 标号 $(v_i, l(v_j))$，$l(v_j) = \min[l(v_i), c_{ij} - f_{ij}]$。这时，点 v_j 成为标号而未检查的点。

②若在弧 (v_j, v_i) 上，$f_{ji} > 0$，则给 v_j 标号 $(-v_i, l(v_j))$，$l(v_j) = \min[l(v_i), f_{ji}]$。这时，点 v_j 成为标号而未检查的点。于是 v_i 成为标号而已检查过的点。重复上述步骤，一旦 v_t 被标上号，表明得到一条从 v_s 到 v_t 的增广链 μ，转入调整过程。

若所有标号都是已检查过的，而标号过程进行不下去时，则算法结束，这时的可行流就是最大流。

调整过程中，首先按 v_t 及其他点的第一个标号，利用“反响追踪”的办法，找出增广链 μ。例如，设 v_t 的第一个标号为 v_k（或 $-v_k$），则弧 (v_k, v_t)（或 (v_t, v_k)）是 μ 上的弧。接着检查 v_k 的第一个标号，若为 v_i（或 $-v_i$），则找出 (v_i, v_k)（或 (v_k, v_i)）。再检查 v_i 的第一个标号，直到 v_s 为止。被找出的弧就构成了增广链 μ。令调整量 θ 是 $l(v_t)$，即 v_t 的第二个标号。令

$$f'_{ij} = \begin{cases} f_{ij} + \theta & (v_i, v_j) \in \mu^+ \\ f_{ij} - \theta & (v_i, v_j) \in \mu^- \\ f_{ij} & (v_i, v_j) \notin \mu \end{cases}$$

去掉所有的标号，对新的可行流 $f' = \{f'_{ij}\}$，重新进入标号过程。

在实际网络最大流寻求过程中，简要的做法是首先寻求起点和终点的路，即所有的弧都是前向弧，找出每段弧的增加量，寻求其最小值，每段弧的流量均加上该最小值；接着找起点到终点的最短路；重复上述过程。

如果从起点到终点的任何路均不能增加，则寻找从起点到终点含有后向弧的增广链，找出每段前向弧的增加量和每段后向弧的减少量，取最小值，每段前向弧加上最小值，每段后向弧减去这个最小值。重复上述过程，直到无法调整为止。

【例 8-4】求如图 8-9 所示网络流量图的最大网络流。

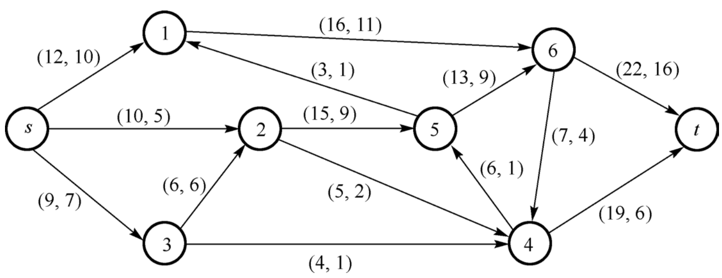


图 8-9　网络流量图

【解】按照最大网络流算法，可以将标号过程和调整过程合二为一。

首先找出从起点到终点的路，如 $s \to 1 \to 6 \to t$。每段弧均为前向弧，可增加量分别为 2、5 和 6，最小值为 2，于是每段弧上均增加 2。此时，$s \to 1$ 变成饱和弧。

接着，寻求路 $s \to 3 \to 4 \to t$，每段弧均为前向弧，可增加量分别为 2、3 和 13，最小值为 2，每段弧上均增加 2。此时，$s \to 3$ 变成饱和弧。

再次，寻找 $s \to 2 \to 5 \to 6 \to t$，每段弧均为前向弧，可增加量分别是 5、6、4 和 4，最小值为 4，于是每段弧的流量均增加 4。此时，$6 \to t$ 变成饱和弧。

最后，可以寻求增广链 $s-2-3-4-t$，其中仅 $3 \to 2$ 为后向弧，于是其他前向弧的增加量分别为 1、1 和 11，后向弧的允许减少量为 6，取最小值 1，每段前向弧流量均加上 1，每段后向弧的流量减少 1，于是得到该问题的最大网络流的图，如图 8-10 所示。

最大网络流量为 $v(f) = v_{s1} + v_{s2} + v_{s3} = 31$；最小截集为 $V = (v_s)$；$\bar{V} = (v_3, v_2, v_4, \cdots)$。

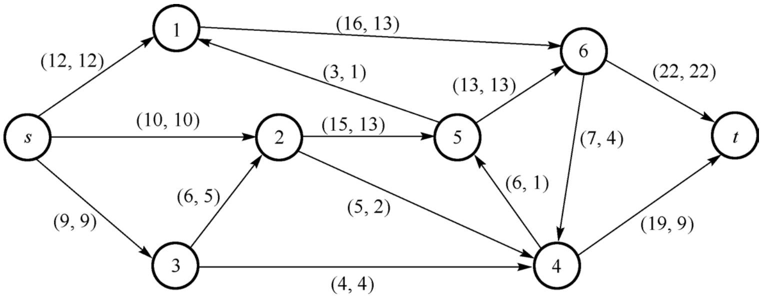


图 8-10　最大网络流的图

8.2.3　最小费用最大网络流问题

网络 $D = (V, A, C)$ 中每个弧 (v_i, v_j) 上，包括容量 c_{ij} 和单位流量费用 $b(v_i, v_j) \geqslant 0$（简记为 b_{ij}）。最小费用最大流就是求一个最大流 f，且总费用 $b(f) = \sum\limits_{(v_i, v_j \in A)} b_{ij} f_{ij}$ 取极小值。

若 f 是流量为 $v(f)$ 的所有可行流中费用最小者，μ 是关于 f 的所有增广链中费用最小的增广链，沿 μ 去调整 f 得到的可行流 f' 就是流量为 $v(f')$ 的所有可行流中的最小费用流。当 f' 是最大流时，即为最小费用最大流。由于 $b_{ij} \geqslant 0$，$f = 0$ 必是流量为 0 的最小费用流。

设 f 是流量 $v(f)$ 的最小费用流，寻求关于 f 的最小费用增广链可构造一个赋权有向图 $W(f)$，它的顶点是原网络 D 的顶点，而把 D 中的每一条弧 (v_i, v_j) 变成两个相反方向的弧 (v_i, v_j) 和 (v_j, v_i)。定义 $W(f)$ 中弧的权 w_{ij} 为

$$w_{ij} = \begin{cases} b_{ij} & f_{ij} < c_{ij} \\ +\infty & f_{ij} = c_{ij} \end{cases}, \quad w_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & f_{ij} > 0 \\ +\infty & f_{ij} = 0 \end{cases}$$

长度为 $+\infty$ 的弧可以从 $W(f)$ 中略去。

开始取 $f^{(0)} = 0$，若在第 $k-1$ 步得到最小费用流 $f^{(k-1)}$，则构造赋权有向图 $W[f^{(k-1)}]$，在 $W[f^{(k-1)}]$ 中寻求从 v_s 到 v_t 的最短路。若不存在最短路（即最短路权是 $+\infty$），则 $f^{(k-1)}$ 就是最小费用最大流；若存在最短路，则在原网络 D 中得到相应的增广链 μ，在增广链 μ 上对 $f^{(k-1)}$ 进行调整。调整量为 $\theta = \min[\min\limits_{\mu^+}(c_{ij} - f_{ij}^{(k-1)}), \min\limits_{\mu^-}(f_{ij}^{(k-1)})]$。

令 $f_{ij}^{(k)} = \begin{cases} f_{ij}^{(k-1)} + \theta & (v_i, v_j) \in \mu^+ \\ f_{ij}^{(k-1)} - \theta & (v_i, v_j) \in \mu^- \\ f_{ij}^{(k-1)} & (v_i, v_j) \notin \mu \end{cases}$，得到新的可行流 $f^{(k)}$，再对 $f^{(k)}$ 重复上述步骤，直到不存在最短路为止。

【例 8-5】求图 8-11 所示网络中从 v_s 至 v_t 的最小费用最大流，弧旁的数字为（b_{ij}，c_{ij}）。

【解】求起点到终点的最短路，为 $v_s \to v_2 \to v_3 \to v_t$ 或 $v_s \to v_2 \to v_1 \to v_3 \to v_t$ 。任意选择一条，如 $v_s \to v_2 \to v_3 \to v_t$ ，每段弧可以增加的流量为 4、2 和 5，于是分别在这三段弧上增加流量为 2，此时 $v_2 \to v_3$ 变成饱和弧。

余下的最短路为 $v_s \to v_2 \to v_1 \to v_3 \to v_t$ ，每段弧上可以增加的流量分别为 2、3、6 和 3，于是这四段弧上分别增加流量为最小值 2。此时 $v_s \to v_2$ 变成饱和弧。接着，余下最短路为 $v_s \to v_1 \to v_3 \to v_t$ ，可以增加的流量为 1，于是三段弧分别增加流量为 1。

余下的增广链为 $v_s \to v_1 \to v_2 \to v_t$ ，可以改变的量为 2，于是前向弧流量增加 2，后向弧流量减少 2。余下的增广链为 $v_s \to v_1 \to v_3 \to v_2 \to v_t$ ，可以改变的量为 2，于是前向弧流量增加 2，后向弧流量减少 2。

此时，已经不存在最短路，于是最大流量为 9，最小费用为 $4 \times 1 + 5 \times 4 + 5 \times 1 + 4 \times 6 + 5 \times 2 = 63$ 。

其最小费用最大网络流的图如图 8-12 所示。

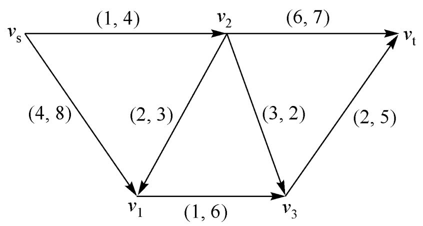


图 8-11　网络图

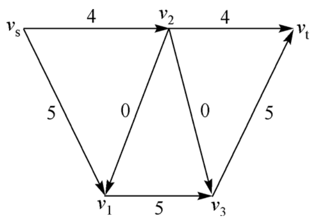


图 8-12　最小费用最大网络流的图

8.2.4　中国邮递员问题

中国邮递员问题也称为一笔画问题，是图论中最早研究出来的一个问题，是欧拉于 1736 年研究哥尼斯堡七桥问题时提出来的。

七桥问题是：普雷格尔河中有两个岛，连接两岸和两岛的桥有七座，如图 8-13 所示，问一个散步者能否每座桥均走且只走一次而最终回到出发点。欧拉以陆地为点，桥梁为边，将七桥图抽象为一笔画图，如图 8-14 所示。

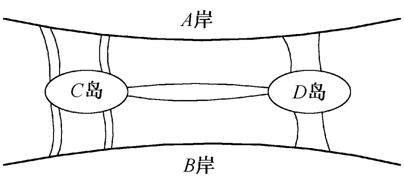


图 8-13　七桥图

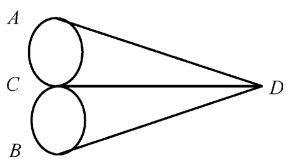


图 8-14　一笔画图

给定一个连通多重图 G ，若存在一条链，过每边一次且仅一次，则称这条链为欧拉链。若存在一个简单圈，过每边一次且仅一次，称这个圈为欧拉圈。一个图如果有欧拉圈，则称为欧拉图。如果连通多重图 G 有欧拉圈，当且仅当 G 中无奇点。连通多重图 G 有欧拉链，当且仅当 G 恰有两个奇点（证明见附录 C）。依据这种性质，可以判断一个图能否一笔画。七桥图不能一笔画，因为该图有四个奇点。

画一笔画图就是找出欧拉圈（ G 无奇点）和欧拉链（ G 恰有两个奇点）。设 e 是连通图 G 的一个边，如果从 G 中丢去 e ，图就不连通了，则称 e 是图 G 的割边。

设 $G=(V,E)$ 是无奇点的连通图，以 $\mu_k=(v_{i_0},e_{i_1},v_{i_1},e_{i_2},v_{i_2},\cdots,v_{i_{k-1}},e_{i_k},v_{i_k})$ 记在第 k 步简单链，记 $E_k=\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k}\}$，$\overline{E_k}=E/E_k$，$G_k=(V,\overline{E_k})$。开始 $k=0$ 时，令 $\mu_0=(v_{i_0})$，v_{i_0} 是图 G 的任意一点，$E_0=\varnothing$，$G_0=G$。

第 $k+1$ 步时，在 G_k 中选 v_{i_k} 的一条关联边 $e_{i_{k+1}}=[v_{i_k},v_{i_{k+1}}]$，使 $e_{i_{k+1}}$ 不是 G_k 的割边(除非 v_{i_k} 是 G_k 的悬挂点，v_{i_k} 在 G_k 中的悬挂边选为 $e_{i_{k+1}}$)。

令 $\mu_{k+1}=(v_{i_0},e_{i_1},v_{i_1},e_{i_2},v_{i_2},\cdots,v_{i_{k-1}},e_{i_k},v_{i_k},e_{i_{k+1}},v_{i_{k+1}})$，重复这个过程，直到选不到所要求的边为止。可以证明，这时的简单链必定终止于 v_{i_0}，就是图 G 的欧拉圈。

如果没有奇点，邮递员就可以从邮局出发，走过每条街道一次且仅一次，最后回到邮局路程最短。对有奇点的街道图，就必须在某些街道上重复走一次或多次。如 $v_1\to v_2\to v_4\to v_3\to v_2\to v_4\to v_6\to v_5\to v_4\to v_6\to v_5\to v_3\to v_1$，总权为 12，边 $[v_2,v_4]$、$[v_4,v_6]$、$[v_6,v_5]$ 上各重复走了一次。

如果边 $[v_i,v_j]$ 上重复走了几次，可在图中 v_i、v_j 之间增加几条边，令每条边的权和原来的权相等，把新增加的边称为重复边。这条路线就是相应的新图中的欧拉圈。例如，图 8-15 中两条投递路线分别形成图 8-16 的欧拉圈。

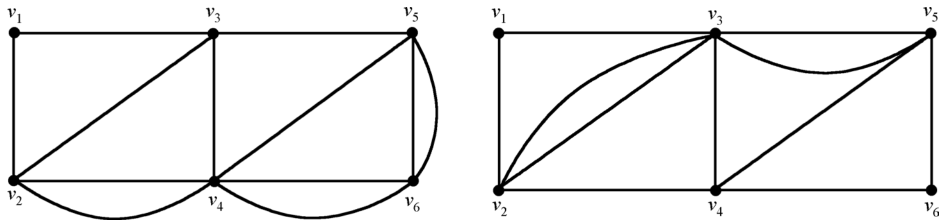


图 8-15　街道图

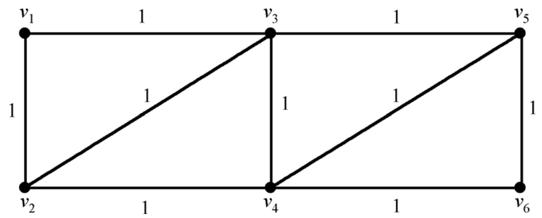


图 8-16　含有欧拉圈的图

于是，中国邮递员问题就是在一个有奇点的图中，增加一些重复边，使新图不含奇点，并且重复边的总权为最小。新图中不含奇点而增加的重复边称为可行(重复边)方案，总权最小的可行方案称为最优方案。

解决中国邮递员问题的方法主要是奇偶点作业法，主要有以下几种。

1. 第一个可行方案的确定方法

如果图中有奇点，就可以把它们配成对。因为图是连通的，故每对奇点之间必有一条链，把这条链的所有边作为重复边加到图中去，新图中必无奇点，即给出了第一个可行方案。

2. 调整可行方案，使重复边总权下降

图 8-17 中，在边 $[v_1,v_2]$ 上有两条重复边，去掉重复边图仍无奇点，剩下的重复边也是一个可行方案，而总长度却有所下降。同样，$[v_1,v_8]$、$[v_4,v_5]$、$[v_5,v_6]$ 上的重复边也是如此。

若 $[v_i, v_j]$ 上有两条或以上的重复边，去掉偶数条，就得到一个总权较小的可行方案。

(1) 在最优方案中，图的每一边上最多有一条重复边。图 8-17 可以调整为图 8-18，重复边总权下降为 21。把图中某个圈上的重复边去掉，而给没有重复边的边加上重复边，图中仍没有奇点。如果在某个圈上重复边的总权大于这个圈的总权的一半，将得到一个总权下降的可行方案。

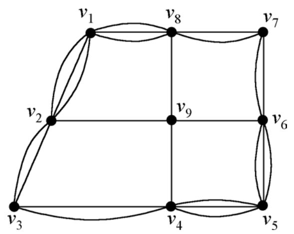


图 8-17　加入重复边的图 1

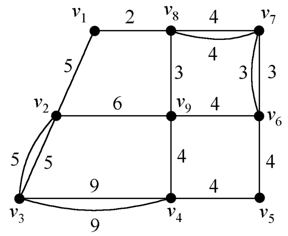


图 8-18　加入重复边的图 2

(2) 在图 8-18 中，圈 $(v_2, v_3, v_4, v_9, v_2)$ 的总权为 24，重复边总权为 14，大于该圈总权的一半。因此，以 $[v_2, v_9]$、$[v_9, v_4]$ 上的重复边代替 $[v_2, v_3]$、$[v_3, v_4]$ 上的重复边，使重复边总权下降为 17，如图 8-19 所示。

3. 判断最优方案的标准

一个最优方案是满足(1)和(2)的可行方案。若满足，所得方案即为最优方案；若不满足则调整方案直至条件(1)和(2)均得到满足时为止。图 8-19 中的圈 $(v_1, v_2, v_9, v_6, v_7, v_8, v_1)$，重复边的总权为 13，而圈的总权为 24，不满足(2)，经调整得图 8-20。重复边的总权将下降为 15。检查图 8-20，(1)和(2)均满足。于是得最优方案。

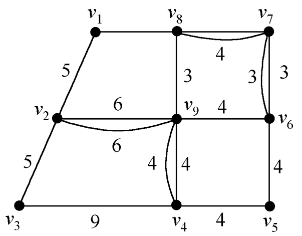


图 8-19　加入重复边的图 3

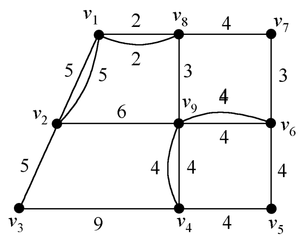


图 8-20　加入重复边的图 4

8.3　网络计划与优化

网络计划技术是运用网络图的形式来组织项目和进行计划管理的一种科学方法。它的基本原理是利用网络图表示计划任务的进度安排，并反映出计划任务各项活动之间的相互关系，通过网络分析、计算网络时间确定关键活动和关键路线，利用时差不断改善网络计划，求得工期、资源与成本的综合优化方案。

8.3.1　网络计划图基本术语

网络计划图是在网络图上标注时标和时间参数的进度计划图，是有时序的有向赋权图。表述关键路线法(CPM)和计划评审技术(PERT)的网络计划图没有本质的区别，结构和术语

是一样的，仅前者的时间参数是确定型的，而后者的时间参数是不确定型的。于是统一给出一套专用的术语和符号。

（1）箭线和节点。箭线是带箭头的实射线（用“→”表示）和虚射线（用“⇢”表示）。节点是箭线两端的连接点（用“○”或“□”表示）。

（2）工作（也称工序、活动、作业）。将整个项目按需要的粗细程度分解成若干需要耗费时间或需要耗费其他资源的子项目或单元。

（3）描述工程项目网络计划图有两种表达的方式：双代号网络计划图和单代号网络计划图。双代号网络计划图在计算时间参数时，又可分为工作计算法和节点计算法。

①双代号网络计划图。用箭线表示工作，箭尾的节点表示工作的开始点，箭头的节点表示工作的完成点。用 i、j 两个代号及箭线表示一项工作，箭线之间的连接顺序表示工作之间的先后开工的逻辑关系，如图 8-21 所示。

②单代号网络计划图。用节点表示工作，箭线表示工作之间的先完成与后完成的关系为逻辑关系。在节点中标记必需的信息，如图 8-22 所示。

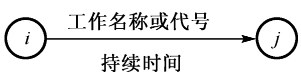


图 8-21　双代号工作表示

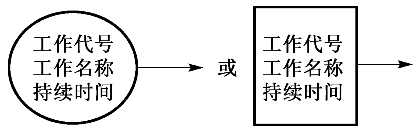


图 8-22　单代号工作表示

为了正确表述各个工作的相互连接关系，正确绘制网络计划图，应遵循以下规则：

（1）网络计划图的方向、时序和节点编号。网络计划图是有向、有序的赋权图，按项目的工作流程自左向右地绘制，在时序上反映完成各项工作的先后顺序。节点编号必须按箭尾节点的编号小于箭头节点的编号来标记。在网络图中只能有一个起始节点，表示工程项目的开始；一个终点节点，表示工程项目的完成。从起始节点开始沿箭线方向顺序自左往右，通过一系列箭线和节点，最后到达终点节点的通路，称为线路。

（2）紧前工作和紧后工作。紧前工作是指紧排在本工作之前的工作，且开始或完成后，才能开始本工作。紧后工作是指紧排在本工作之后的工作，且本工作开始或完成后，才能做的工作。

从起始节点至本工作之前在同一线路的所有工作，称为先行工作；自本工作到终点节点在同一线路的所有工作，称为后继工作。

（3）虚工作。在双代号网络计划图中，只表示相邻工作之间的逻辑关系，不占用时间和不消耗人力、资金等的虚设的工作。虚工作用虚箭线⇢表示。

（4）相邻两节点之间只能有一条箭线连接，否则将造成逻辑上的混乱。

（5）网络计划图中不能有缺口和回路。在网络计划图中严禁出现从一个节点出发，顺箭线方向又回到原出发节点，形成回路。回路将表示这工作永远不能完成。网络计划图中出现缺口，表示这些工作永远达不到终点，项目无法完成。

（6）平行工作。可与本工作同时进行的工作。

（7）起始节点与终点节点。在网络计划图中只能有一个起始节点和一个终点节点。当工程开始或完成时存在几个平行工作时，可以用虚工作将它们与起始节点或终点节点连接起来。

（8）线路。线路是网络图中从起点节点沿箭线方向顺序通过一系列箭线与节点，最终到达终点节点的通路。

从网络图中可以计算出各线路的持续时间，其中持续时间最长的线路是关键路线，或称主要矛盾线。关键路线上的各工作为关键工作，它的持续时间决定了整个项目的工期。

(9)网络计划图的布局。尽可能将关键路线布置在网络计划图的中心位置，按工作的先后顺序将联系紧密的工作布置在邻近的位置。为了便于在网络计划图上标注时间等数据，箭线应是水平线或具有一段水平线的折线。在网络计划图上附有时间坐标或日历进程。

(10)网络计划图的类型。

①总网络计划图：以整个项目为计划对象，编制网络计划图，供决策领导层使用。

②分级网络计划图：按不同管理层次的需要，编制的范围大小不同，详细程度不同的网络计划图，供不同管理部门使用。

③局部网络计划图：将整个项目某部分为对象，编制更详细的网络图，供专业部分使用。

当用计算机网络计划软件编制时，可进行网络计划图分解与合并。可以根据需要，将工作分解为更详细的子工作，也可以将几项工作合并为综合的工作，以便显示不同粗细程度的网络计划。

8.3.2　网络计划图的时间参数计算

计算网络计划图中有关的时间参数，主要目的是找出关键路线，为网络计划的优化、调整和执行提供明确的时间概念。

网络计划图中的时间参数主要有：工作持续时间(D)、工作最早开始时间(ES)、工作最早完成时间(EF)、工作最迟开始时间(LS)、工作最迟完成时间(LF)、工作总时差(TF)和工作自由时差(FF)。

(1)工作持续时间 D 。指完成某一项工作所需要的时间，其估计方法有以下两种。

①单时估计法(定额法)：每项工作只估计或规定一个确定的持续时间值。一般有工作的工作量、劳动定额资料以及投入人力等，工作的持续时间为 $Q/(RSn)$ 。其中，Q 为工作的工作量，以时间单位表示，如小时，或以体积、质量、长度等单位表示；R 为可投入人力和设备的数量；S 为每人或每台设备每工作班能完成的工作量；n 为每天正常工作班数。

当具有类似工作的持续时间的历史资料时，可以根据这些资料，采用分析对比的方法确定所需工作的持续时间。

②三时估计法：在不具备有关工作的持续时间的历史资料，较难估计出工作持续时间时，可对工作估计三种时间值，然后计算其平均值。这三种时间值是：

A. 乐观时间：在一切都顺利时，完成工作需要的最少时间，记作 a 。

B. 最可能时间：在正常条件下，完成工作所需要的时间，记作 m 。

C. 悲观时间：在不顺利条件下，完成工作需要最多的时间，记作 b 。

上述三种时间的发生都具有一定的概率，这些概率分布认为是正态分布。一般情况下，通过专家估计法给出三时数据。$D = \dfrac{a + 4m + b}{6}$ ；方差 $\sigma^2 = \left(\dfrac{b - a}{6}\right)^2$ 。

(2)工作最早开始时间 ES 和工作最早完成时间 EF。从网络计划图的起始点开始，沿箭线方向依次逐项计算。第一项工作的最早开始时间为 0，记作 $\mathrm{ES}_{i-j} = 0$ (起始点 $i = 1$)。第一项工作的最早完成时间为 $\mathrm{EF}_{1-j} = \mathrm{ES}_{1-j} + D_{1-j}$ 。第一项工作完成后，其紧后工作才能开始。它的工作最早完成时间 EF 就是其紧后工作最早开始时间 ES ，于是 $\mathrm{EF}_{1-j} = \mathrm{ES}_{1-j} + D_{1-j}$ 。

计算工作的 ES 时,在有多项紧前工作情况下,只能在这些紧前工作都完成后才能开始。因此，本工作的最早开始时间是 ES = max（紧前工作的 EF）。其中，EF = ES + 工作持续时间 D ,表示为 $ES_{1-j} = \max_h(EF_{h-i}) = \max_h(ES_{h-i} + D_{h-i})$ 。

(3)工作最迟开始时间 LS 和工作最迟完成时间 LF。从网络图的终点节点开始，采用逆序法逐项计算。按逆箭线方向，依次计算各工作的最迟完成时间 LF 和最迟开始时间 LS，直到第一项工作为止。在网络图中，最后一项工作 $(i-n)(j=n)$ 的最迟完成时间应由工程的计划工期确定。在未给定时，可令其等于其最早完成时间，即 $LF_{i-n} = EF_{i-n}$ 。有

$$LF = \min(\text{紧后工作的 LS}),\ LS = LF - \text{工作持续时间 } D$$

其他工作的最迟开始时间 $LS_{i-j} = LF_{i-j} - D_{i-j}$ ；当有多个紧后工作时，最迟完成时间 LF = min（紧后工作的 LS），或表示为 $LF_{i-j} = \min_k(LF_{j-k} - D_{j-k})$ 。

(4)工作时差。是指工作有机动时间。常用的有两种时差，即工作总时差和工作自由时差。

①工作总时差 TF_{i-j} ：是指在不影响工期的前提下工作所具有的机动时间，按工作计算法计算。$TF_{i-j} = EF_{i-j} - ES_{i-j} - D_{i-j} = LS_{i-j} - ES_{i-j}$ 或 $TF_{i-j} = LF_{i-j} - EF_{i-j}$ 。

②工作自由时差 FF：是指在不影响其紧后工作最早开始的前提下，工作所具有的机动时间。$FF_{i-j} = ES_{j-k} - ES_{i-j} - D_{i-j}$ 或 $FF_{i-j} = ES_{j-k} - EF_{i-j}$ 。

网络计划图中时间参数确定后，就是找出网络计划中的关键工作和关键线路。通常，关键路线有如下特征：在线路上从起点到终点都由关键工作组成；在确定型网络计划中是指线路中工作总持续时间最长的线路；在关键线路上无机动时间，工作总时差为零；在非确定型网络计划中是指估计工期完成可能性最小的线路。

如果一条关键线路上有 n 项关键工作，第 i 项工作完成时间的乐观估计为 a_i ，悲观估计为 b_i ，最可能时间为 m_i ，平均完成时间为 t_i ，则第 i 项工作以均值为作业时间的方差为 $\sigma_i^2 = \left(\frac{b_i - a_i}{6}\right)^2$ 。整个网络计划的总完工期是一个期望工程。关键路线上各道工作的平均工时之和为 $T_e = \sum_{i=1}^{n} t_i$ ，总完工期的方差就是关键线路上所有工序的方差之和 $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$ 。若工作足够多，每项工作的工时对整个任务的完工期影响不大时，由中心极限定理可知，总完工期服从以 T_e 为均值、以 $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$ 为方差的正态分布。

为了确保任务在计划期内完成，可以计算在某一给定期限 T_s 前完工的概率。通过指定多个完工期 T_s ，直到求得有足够可靠性保证的计划完工期 T_s ，将其作为总工期，即

$$P(T \leqslant T_s) = \int_{-\infty}^{T_s} N\left(T_e,\ \sqrt{\sum \sigma_i^2}\right)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\frac{T_s - T_e}{\sqrt{\sum \sigma_i^2}}} N(0,\ 1)dt = \phi\left(\frac{T_s - T}{\sqrt{\sum \sigma_i^2}}\right)$$

式中，$N\left(T_e,\ \sqrt{\sum \sigma_i^2}\right)$ 表示以 T_e 为均值、以 $\sqrt{\sum \sigma_i^2}$ 为方差的正态分布；$N(0,\ 1)$ 表示标准正态分布。

【例 8-6】已知某网络计划中各项工作的 a、m、b 值(单位为月)，分别见表 8-1 的第 2、3、4 列。求出每项工作的平均工时 t 及均方差；画出网络图，确定关键路线；求在 25 个月前完工的概率。

【解】根据公式计算出各项工作的平均工时 t 和 σ ，填入表 8-3 的第 5、6 列。

表 8-3　网络计划参数表

工作	a	m	b	t	σ
①→②	7	8	9	8	0.333
①→③	5	7	8	6.833	0.5
②→⑥	6	9	12	9	1
③→④	4	4	4	4	0
③→⑤	7	8	10	8.167	0.5
③→⑥	10	13	19	13.5	1.5
④→⑤	3	4	6	4.167	0.5
⑤→⑥	4	5	7	5.167	0.5
⑤→⑦	7	9	11	9	0.667
⑥→⑦	3	4	8	4.5	0.833

计算出各工作的最早开工时间 ES 和最迟开工时间 LS、总时差 TF，见表 8-4。

表 8-4　时间参数表

工作	ES	LS	TF
①→②	0	3.333	3.333
①→③	0	0	0
②→⑥	8	11.333	3.333
③→④	6.833	6.999	0.166
③→⑤	6.833	6.999	0.166
③→⑥	6.833	6.833	0
④→⑤	10.833	10.999	0.166
⑤→⑥	15	15.166	0.166
⑤→⑦	15	15.833	0.833
⑥→⑦	20.333	20.833	0

从表 8-2 中可知，时差为零的工作为①→③、③→⑥、⑥→⑦，所以关键路线为①→③→⑥→⑦，如图 8-23 中的双线所示，总完工期为 24.833 月。

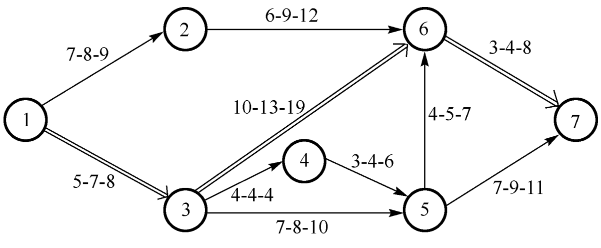


图 8-23　关键路线图

由于关键工作为①→③、③→⑥、⑥→⑦，所以

$$\sqrt{\sum \sigma^2} = \sqrt{\sigma_{1,3}^2 + \sigma_{3,6}^2 + \sigma_{6,7}^2} + \sqrt{0.5^2 + 1.5^2 + 0.833^2} \approx 1.787$$

在 25 个月前完工的概率为 $P(T \leqslant 25) = \int_{-\infty}^{\frac{25-24.833}{1.787}} N(0,1)\mathrm{d}t = \phi(0.099) = 53.98\%$ 。

8.3.3　网络计划图的优化

绘制网络计划图，计算时间参数和确定关键线路，仅得到一个初始计划方案。还需要根据要求和实际资源的配置，对初始方案进行调整和完善，即进行网络计划优化。目标是综合考虑进度、合理利用资源、降低费用等。

1. 工期优化

若网络计划图的计算工期大于上级要求的工期，必须根据要求计划的进度，缩短工程项目的完工工期。主要采取以下措施，增加对关键工作的投入，以便缩短关键工作的持续时间，实现工期缩短：

（1）采取技术措施，提高工效，缩短关键工作的持续时间，使关键线路的时间缩短。

（2）采取组织措施，充分利用非关键工作的总时差，合理调配人力、物力和资金等资源。

2. 资源优化

实际工程项目包括工作繁多，需要投入的资源种类很多，均衡地利用资源，可以采取如下方式：

（1）优先安排关键工作所需要的资源。

（2）利用非关键工作的总时差，错开各工作的开始时间，避开在同一时间内集中使用同一资源，以免出现高峰。

（3）在确实受到资源制约，或在考虑综合经济效益的条件下，也可以适当地推迟工程的工期，实现错开高峰的目的。

3. 时间-费用优化

编制网络计划时，要研究如何使完成项目的工期尽可能缩短，费用尽可能少；或在保证既定项目完成时间条件下，所需要的费用最少；或在费用限制的条件下，项目完工的时间最短。这就是时间-费用优化要解决的问题。费用可以分为两大类：

（1）直接费用。指直接与项目的规模有关的费用，包括材料费用、直接生产工人工资等。为了缩短工作的持续时间和工期，就需要增加投入，即增加直接费用。

（2）间接费用。包括管理费等。一般按项目工期长度进行分摊，工期越短，分摊的间接费用就越少。一般项目的总费用与直接费用、间接费用、项目工期之间的关系如图 8-24 所示。

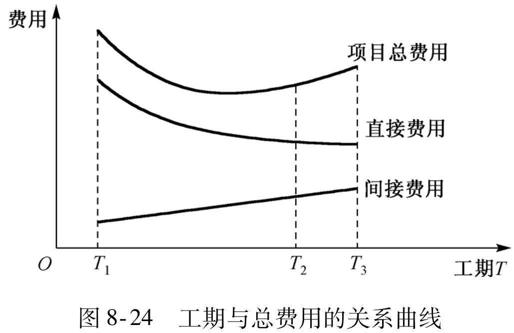


图 8-24　工期与总费用的关系曲线

T_1 —最短工期，项目总费用最高　T_2 —最佳工期　T_3 —正常的工期

当总费用最少且工期短于要求工期时，就是最佳工期。

进行时间 - 费用优化时，首先要计算出不同工期下最低直接费用率，然后考虑相应的间接费用。费用优化的步骤如下：

(1)计算工作费用增加率(简称费用率)。

费用增加率是指缩短工作持续时间每一单位时间(如一天)所需要增加的费用。按工作的正常持续时间计算各关键工作的费用率，通常可表示为

$$\Delta C_{i-j}=\frac{\mathrm{CC}_{i-j}-\mathrm{CN}_{i-j}}{\mathrm{DN}_{i-j}-\mathrm{DC}_{i-j}}$$

式中　ΔC_{i-j} ——工作 $i-j$ 的费用率；

CC_{i-j} ——将工作 $i-j$ 持续时间缩短为最短持续时间后，完成该工作所需要的直接费用；

CN_{i-j} ——在正常条件下完成工作 $i-j$ 所需要的直接费用；

DN_{i-j} ——工作 $i-j$ 正常持续时间；

DC_{i-j} ——工作 $i-j$ 最短持续时间。

(2)在网络计划图中找出费用率最低的一项关键工作或一组关键工作，作为缩短持续时间的对象。其缩短后的值不能小于最短持续时间，不能成为非关键工作。

(3)计算相应的增加的总费用，然后考虑由于工期的缩短而产生的间接费用的变化，在此基础上计算项目的总费用。

重复以上步骤，直到获得满意的方案为止。

【例 8-7】已知图 8-25 中各道工序的正常作业时间(在各条直线的下面)和最短作业时间，以及对应于正常作业时间、最短作业时间、各工作所需要的直接费用和每缩短一天工期需要增加的直接费用，见表 8-5，又已知工程项目每天的间接费为 400 元，求该工程项目的最低成本。

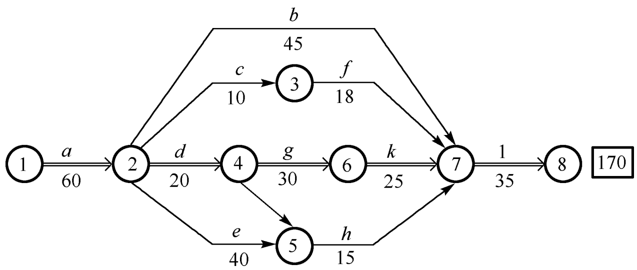


图 8-25　工序作业时间图

表 8-5　相关费用表

工作	正常情况下		采取措施后		直接费用率/(元/天)
	作业时间/天	直接费用/元	最短时间/天	直接费用/元	
a	60	10 000	60	10 000	
b	45	4500	30	6300	120
c	10	2800	5	4300	300
d	20	7000	10	11 000	400
e	40	10 000	35	12 500	500
f	18	3600	10	5440	230
g	30	9000	20	12 500	350
h	15	3750	10	5750	400
k	25	6250	15	9150	290
l	35	12 000	35	12 000	

【解】若按图 8-25 安排,工程工期为 170 天,则直接费用为

$$(10\ 000+4500+2800+7000+10\ 000+3600+9000+3750+6250+12\ 000)\text{元}=68\ 900\text{ 元}$$

工程的间接费用为

170×400 元 $=68000$ 元，故总费用为 68 900 元 $+$ 68 000 元 $=$ 136 900 元。

如果缩短图 8-25 所示网络计划的完工时间，必须要缩短关键线路上直接费用率最低的工作的作业时间，而关键线路为①→②→④→⑥→⑦→⑧，时长为 170 天，次关键线路的时长为 140 天，关键线路上工作 k 的直接费用率为 290 元/天，最低，且低于间接费用。

故将工作 k 的时间缩短，最多可缩短 10 天，工作 k 缩短到极限时间后，关键线路仍为上述路线，但此时的直接费用率最低的关键工作为 g，g 的直接费用率为 350 元/天，低于间接费率，故继续缩短 g 到极限时间，即把 g 工作缩短 10 天，总工期为 150 天，总费用降低

$$[(400-290)+(400-350)]\text{元}\times10=1600\text{ 元}$$

如果再缩短工期，工作的直接费用将大幅度增加,总费用将比 150 天时高。

本章要点

图与网络中的基本要素也即基本概念，包括图、树、支撑树、最短路、最大流等。

图中各类问题的求解，包括最短路问题、最大流问题以及最小费用最大流问题等。

网络计划图中时间参数的计算以及网络计划图的优化。

关键公式

- 工作持续时间单时估计法：$D/(R\times S\times n)$。
- 工作持续时间三时估计法：$D=\dfrac{a+4m+b}{6}$。
- 工作最早开始时间：$\mathrm{ES}_{i-j}=\max_h(\mathrm{EF}_{h-i})=\max_h(\mathrm{ES}_{h-i}+D_{h-i})$。
- 工作最早完成时间：$\mathrm{EF}_{i-j}=\mathrm{ES}_{i-j}+D_{i-j}$。
- 工作最迟开始时间：$\mathrm{LS}_{i-j}=\mathrm{LF}_{i-j}-D_{i-j}$。
- 工作最迟完成时间：$\mathrm{LF}_{i-j}=\min_k(LF_{j-k}-D_{j-k})$。
- 工作总时差：$\mathrm{TF}_{i-j}=\mathrm{EF}_{i-j}-\mathrm{ES}_{i-j}-D_{i-j}=\mathrm{LS}_{i-j}-\mathrm{ES}_{i-j}$。
- 工作自由时差：$\mathrm{FF}_{i-j}=\mathrm{ES}_{j-k}-\mathrm{ES}_{i-j}-D_{i-j}$。

案例解析

将 Dijkstra 算法应用到本章开始的 Seervada 公园例子中，即解决公园面临的第一个问题，将原图画成带弧度的图，如图 8-26 所示。

【解】(1)令 $P(v_1)=0$，$T(v_j)=+\infty$（$j=2,3,\cdots,6$）。

(2)由于 $(v_1,v_2)\in A$，$(v_1,v_3)\in A$，$(v_1,v_4)\in A$，没有其他的以 v_1 为始点弧，故有

$$T(v_2)=\min[T(v_2),p(v_1)+w_{12}]=2$$
$$T(v_3)=\min[T(v_3),p(v_1)+w_{13}]=5$$
$$T(v_4)=\min[T(v_4),p(v_1)+w_{14}]=4$$

由于 $\min\limits_{j=2,\cdots,7}\{T(v_j)\}=2=T(v_2)$，故将 v_2 的 T 标号修改为 P 标号，即 $P(v_2)=2$。

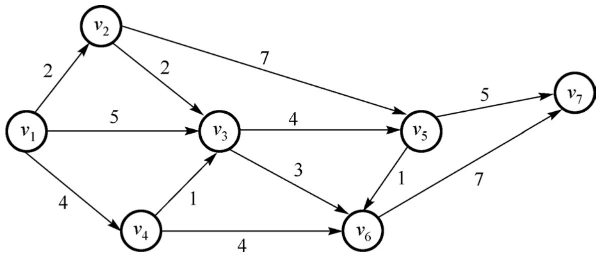


图 8-26　有向图

(3) 检验以 v_2 为始点的弧，其终点为 v_3 和 v_5，因此这三个点相应的 T 标号值变化为

$$T(v_3) = \min[T(v_3), p(v_2) + w_{23}] = 4$$

$$T(v_5) = \min[T(v_5), p(v_2) + w_{25}] = 9$$

由于 $T(v_3) = T(v_4) = 4$ 均最小，故又得到两个 P 标号点 v_3 和 v_4，$P(v_3) = P(v_4) = 4$。

(4) 以 v_3 为始点的弧为 (v_3, v_5) 和 (v_3, v_6)，以 v_4 为始点的弧为 (v_4, v_6) 和 (v_4, v_3)，故

$$T(v_5) = \min[T(v_5), p(v_3) + w_{35}] = 8$$

$$T(v_6) = \min[T(v_6), p(v_3) + w_{36}, p(v_4) + w_{36}] = 7$$

$T(v_6) = 7$ 为最小，得到 P 标号点 v_6，即 $P(v_6) = 7$。

(5) 以 v_6 为始点的弧为 (v_6, v_7)，有

$$T(v_7) = \min[T(v_7), p(v_6) + w_{67}] = 14$$

在 $T(v_5)$ 和 $T(v_7)$ 中，最小值为 $T(v_5) = 8$，故得到 P 标号点 v_5，$P(v_5) = 8$。

(6) 以 v_5 为始点的弧为 (v_5, v_6) 和 (v_5, v_7)，有

$$T(v_7) = \min[T(v_7), p(v_5) + w_{57}] = 13$$

目前 $T(v_7)$ 是唯一的 T 标号点，因此直接把 v_7 修改为 P 标号点，即 $P(v_7) = 13$。

因此得到从公园入口处选择路线 $O \to A \to B \to D \to T$，距离是最短的。

将避圈法应用到本章开始的 Seervada 公园例子中，即解决公园面临的第二个问题。

$i = 1$, $E_0 = \varnothing$, 从 E 中选最小权边 $[v_3, v_4]$，$E_1 = \{[v_3, v_4]\}$；

$i = 2$，从 E/E_1 中选最小边权 $[v_5, v_6]$，$E_2 = \{[v_3, v_4], [v_5, v_6]\}$；

$i = 3$，从 E/E_2 中选最小边权 $[v_1, v_2]$，$E_3 = \{[v_3, v_4], [v_5, v_6], [v_1, v_2]\}$；

$i = 4$，从 E/E_3 中选最小边权 $[v_2, v_3]$，$E_4 = \{[v_3, v_4], [v_5, v_6], [v_1, v_2], [v_2, v_3]\}$；

$i = 5$，从 E/E_4 中选最小边权 $[v_3, v_6]$，$E_5 = \{[v_3, v_4], [v_5, v_6], [v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_3, v_6]\}$；

$i = 6$，从 E/E_5 中选最小边权 $[v_5, v_7]$，$E_6 = \{[v_3, v_4], [v_5, v_6], [v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_3, v_6], [v_5, v_7]\}$；

$i = 7$，这时，任一条未选的边都与已选的边构成圈，所以算法终止。

(V, E_6) 就是要求的最小树，即安置电话线的最短路线，电话线总长为 14 单位。

将标号法应用到本章开始的 Seervada 公园例子中，解决公园面临的第三个问题，如图 8-27所示。

【解】(1) 标号过程。①给 v_s 标上 $(0, +\infty)$，检查 v_s：

在弧 (v_s, v_1) 上，$f_{s1} = 3$，$c_{s1} = 5$，$f_{s1} < c_{s1}$，则 v_1 的标号为 $(v_s, l(v_1))$，其中

$$l(v_1) = \min[l(v_s), (c_{s1} - f_{s1})] = \min[+\infty, 5 - 3] = 2$$

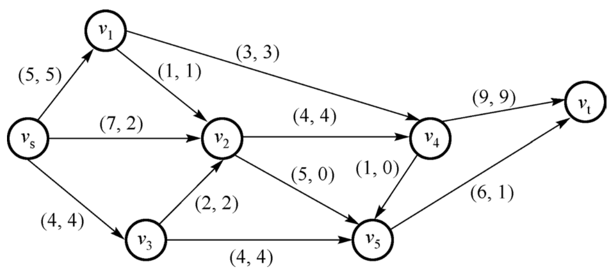


图 8-27　最大流图

在弧 (v_s, v_2) 上，$f_{s2} = 4$，$c_{s2} = 7$，$f_{s2} < c_{s2}$，则 v_2 标号为 $(v_s, l(v_2))$，其中

$$l(v_2) = \min[l(v_s), (c_{s2} - f_{s2})] = \min[+\infty, 7 - 4] = 3$$

② v_1、v_2 中任选一个检查，如检查 v_2：

在弧 (v_2, v_3) 上，$f_{23} = 0$，$c_{23} = 2$，$f_{23} < c_{23}$，则给 v_3 记下标号为 $(v_2, l(v_3))$，其中

$$l(v_3) = \min[l(v_2), (c_{23} - f_{23})] = \min[3, 2 - 0] = 2$$

在弧 (v_2, v_4) 上，$f_{24} = c_{24} = 4$，不满足标号过程。

在弧 (v_2, v_5) 上，$f_{25} = 1$，$c_{25} = 5$，$f_{25} < c_{25}$，则 v_5 的标号为 $(v_2, l(v_5))$，其中

$$l(v_5) = \min[l(v_2), (c_{25} - f_{25})] = \min[5, 5 - 1] = 4$$

③ v_3、v_5 中任选一个检查，如检查 v_5：

在弧 (v_5, v_4) 上，$f_{54} = c_{54} = 1$，不满足标号过程。

在弧 (v_5, v_t) 上，$f_{5t} = 4$，$c_{5t} = 6$，$f_{5t} < c_{5t}$，则 v_t 的标号为 $(v_5, l(v_t))$，其中

$$l(v_t) = \min[l(v_5), (c_{5t} - f_{5t})] = \min[5, 6 - 4] = 2$$

因 v_t 有了标号，故转入调整过程。

(2) 调整过程。

按点的第一个标号找到一条增广链 $v_s \to v_2 \to v_5 \to v_t$，易见 $\mu^+ = \{(v_s, v_2), (v_2, v_5), (v_5, v_t)\}$，按 $\theta = \mathrm{l}(v_t) = 2$ 在 μ 上调整 f。

$f_{s2} + \theta = 4 + 2 = 6$，$f_{25} + \theta = 1 + 2 = 3$，$f_{5t} + \theta = 4 + 2 = 6$，其余的 f_{ij} 不变。

调整后得如图 8-28 所示的可行流，对这个可行流重新进入标号过程。

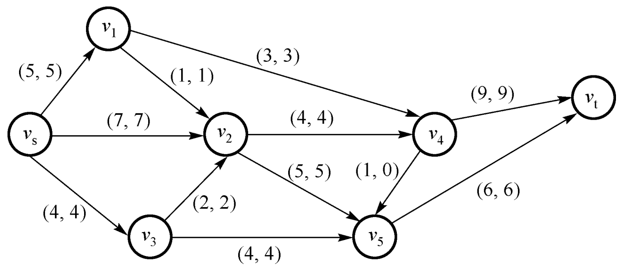


图 8-28　可行流图

①给 v_s 标上 $(0, +\infty)$，检查 v_s：

在弧 (v_s, v_1) 上，$f_{s1} = 3$，$c_{s1} = 5$，$f_{s1} < c_{s1}$，则 v_1 的标号为 $(v_s, l(v_1))$，其中

$$l(v_1) = \min[l(v_s), (c_{s1} - f_{s1})] = \min[+\infty, 5 - 3] = 2$$

在弧 (v_s, v_2) 上，$f_{s2} = 6$，$c_{s2} = 7$，$f_{s2} < c_{s2}$，则 v_2 的标号为 $(v_s, l(v_2))$，其中

$$l(v_2) = \min[l(v_s), (c_{s2} - f_{s2})] = \min[+\infty, 7 - 6] = 1$$

② v_1、v_2 中任选一个检查，如检查 v_2：

在弧 (v_2, v_3) 上，$f_{23}=0$，$c_{23}=2$，$f_{23}<c_{23}$，则给 v_3 记下标号为 $(v_2, l(v_3))$，其中

$$l(v_3)=\min[l(v_2),(c_{23}-f_{23})]=\min[3,2-0]=2$$

在弧 (v_2, v_4) 上，$f_{24}=c_{24}=4$，不满足标号过程。

在弧 (v_2, v_5) 上，$f_{25}=3$，$c_{25}=5$，$f_{25}<c_{25}$，则 v_5 的标号为 $(v_2, l(v_5))$，其中

$$l(v_5)=\min[l(v_2),(c_{25}-f_{25})]=\min[5,5-3]=2$$

③ v_3、v_5 中任选一个检查，如检查 v_5：

在弧 (v_5, v_4) 上，$f_{54}=c_{54}=1$，在弧 (v_5, v_t) 上，$f_{5t}+c_{5t}=6$，均不满足标号条件。

标号过程无法继续下去，算法结束。这时的可行流即为所求最大流。最大流量为

$$v(f)=f_{s1}+f_{s2}+f_{s3}=f_{4t}+f_{5t}=13$$

最短路和最大网络流问题可以转化为线性规划问题，进而采用软件求解。

对于最短路问题，假定最短路包含某段弧为 1，不包含某段弧为 0。于是假设：$O\rightarrow A$，$O\rightarrow B$，$O\rightarrow C$，$A\rightarrow B$，$C\rightarrow B$，$A\rightarrow D$，$B\rightarrow D$，$B\rightarrow E$，$C\rightarrow E$，$D\rightarrow E$，$D\rightarrow T$，$E\rightarrow T$ 的变量分别为 x_1，x_2，…，x_{12}。

目标函数是各个变量分别乘以其距离最小，约束条件包括：从起点出发的路只有一条，到终点的路也只有一条，中间点的到达路和出发路的差值为 0，于是可以构建如下线性规划模型：

$$\min z=2x_1+5x_2+4x_3+2x_4+x_5+7x_6+4x_7+3x_8+4x_9+x_{10}+5x_{11}+7x_{12}$$

$$\text{s.t:}\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\x_{11}+x_{12}=1\\x_1-x_4-x_6=0\\x_2-x_7-x_8+x_4+x_5=0\\x_3-x_5-x_9=0\\x_{10}+x_{11}-x_6-x_7=0\\x_8+x_{11}+x_9-x_{12}=0\\x_i=1,0(i=1,\cdots,12)\end{cases}$$

于是，采用 LINGO 软件求解，其程序如下：

```
min =2* x1 +5* x2 +4* x3 +2* x4 +x5 +7* x6 +4* x7 +3* x8 +4* x9 +x10 +
5* x11 +7* x12;
x1 +x2 +x3 =1;
x11 +x12 =1;
x1 -x4 -x6 =0;
x2 -x7 -x8 +x4 +x5 =0;
x3 -x5 -x9 =0;
x10 +x11 -x6 -x7 =0;
x8 +x10 +x9 -x12 =0;
```

运行软件，在空白处输入该程序，如图 8-29 所示。

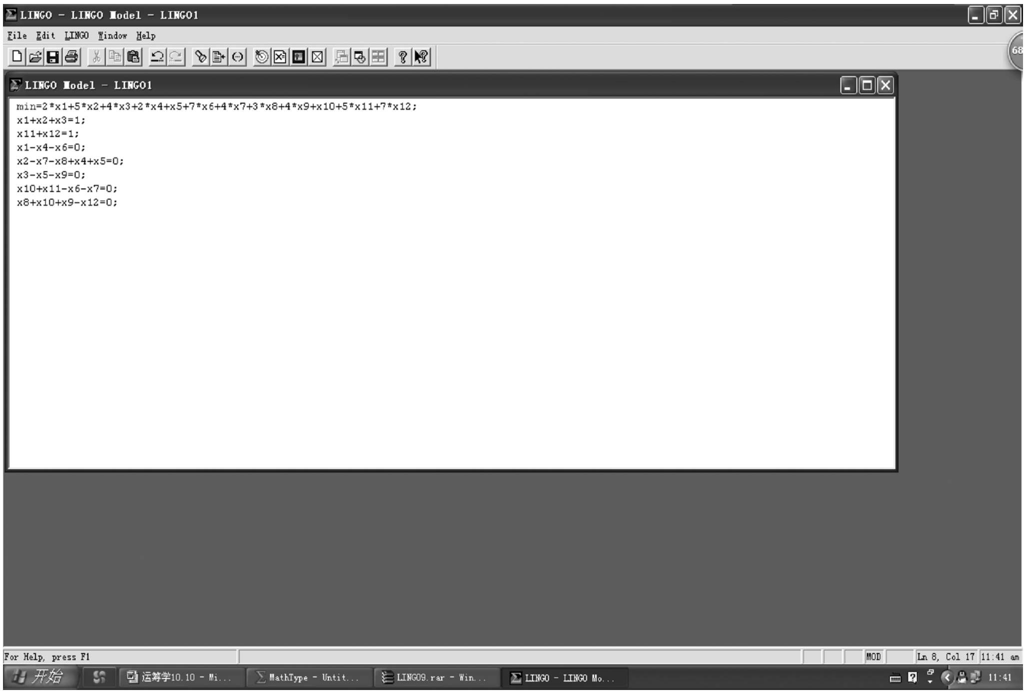


图 8-29

单击“LINGO”菜单中的“Solve”命令项，如图 8-30 所示。

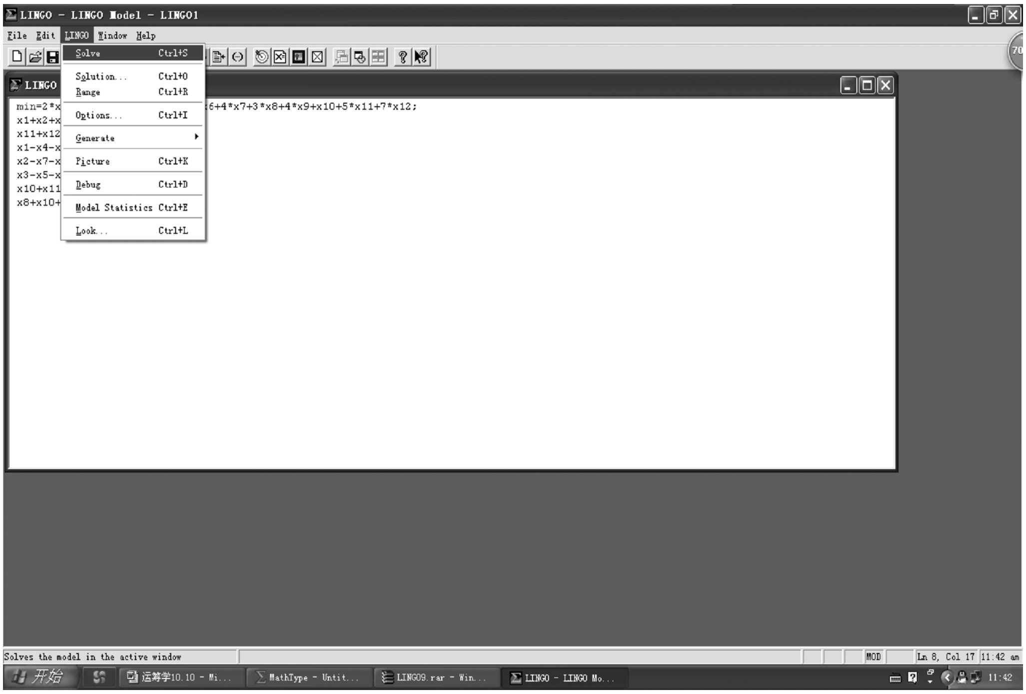


图 8-30

即可得到最优解，如图 8-31 所示。

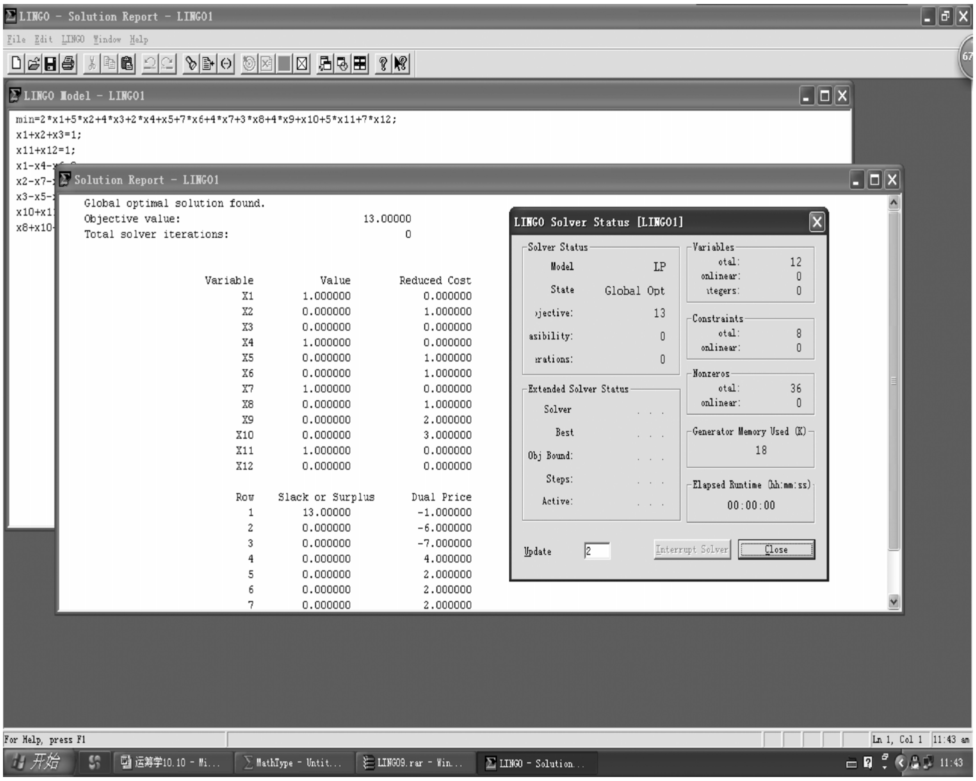


图 8-31

如果采用 Excel 求解，首先区分每段弧的起点和终点，并在 Excel 表格中加以描述，如图 8-32所示。

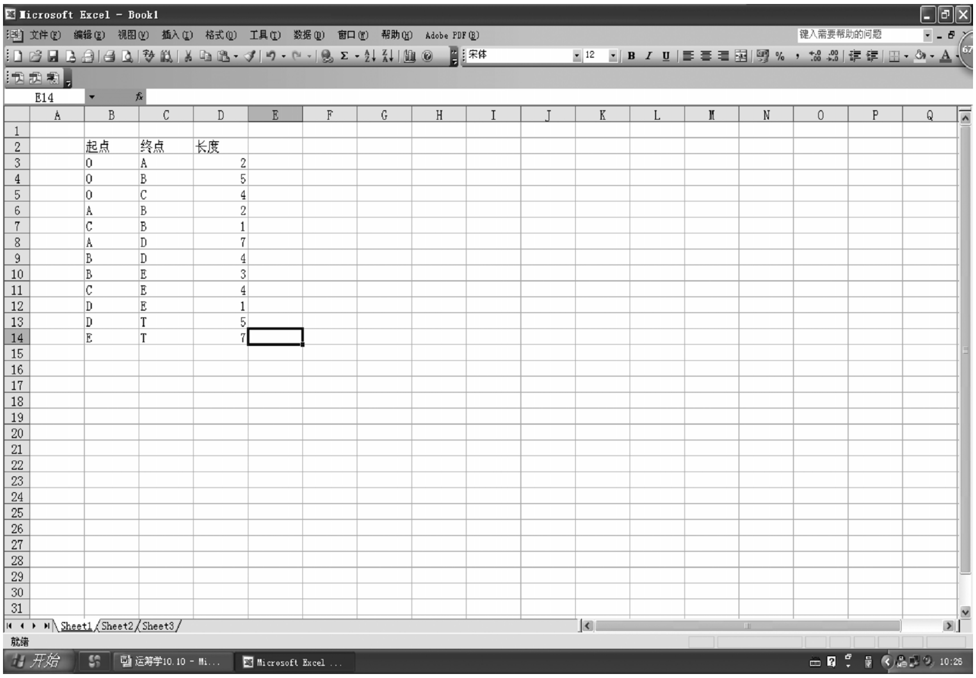


图 8-32

由于起点为 O 点，以其出发的值如图 8-33 所示。

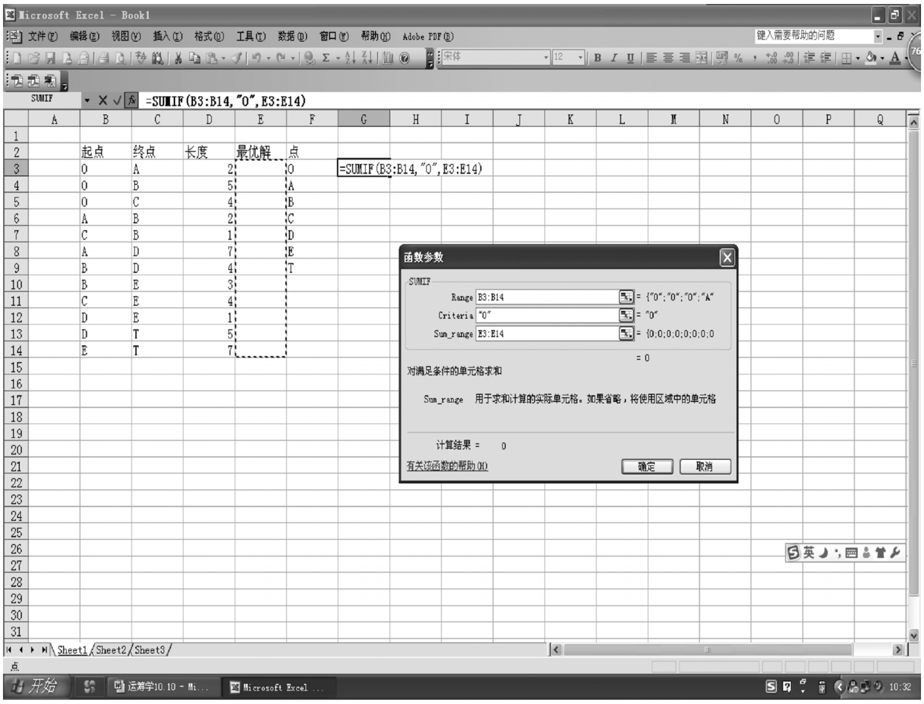


图 8-33

同理，计算终点 T 的值，如图 8-34 所示。

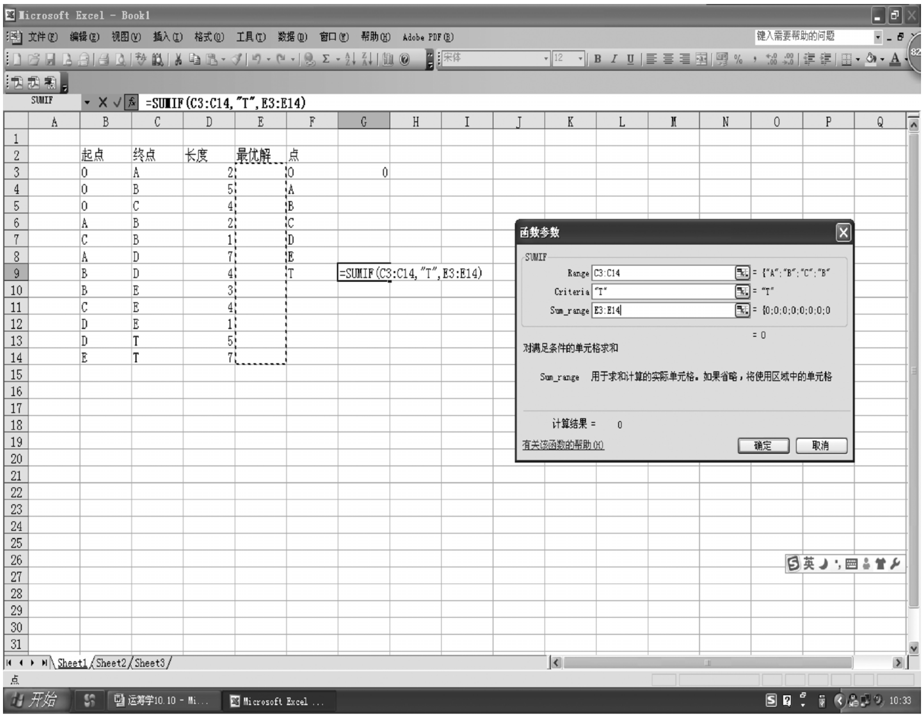


图 8-34

对每个中间点，分别计算以其为起点和终点的值，相减，具体的公式为

＝SUMIF(B3：B14，"A"，E3：E14)－SUMIF(C3：C14，"A"，E3：E14)

如图 8-35 所示。

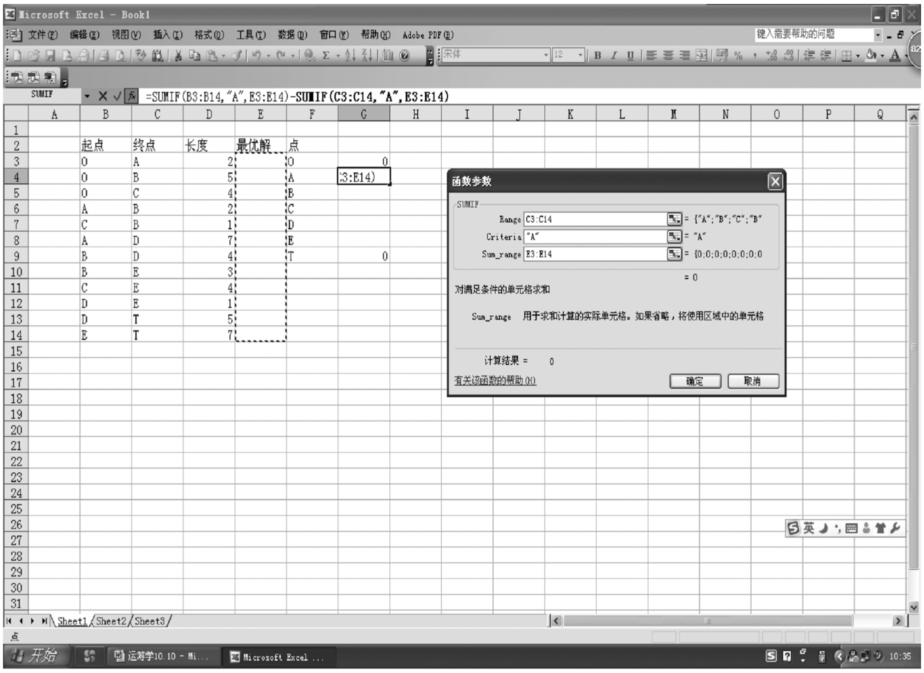


图 8-35

对其他中间点，只需将以上公式中的“A”修改为该中间点即可。对于最短路而言，起点出发的路线只有一条，终点出发的路线也只有一条，而任何中间点到达到出发的路也可能都是 0 条或 1 条，但是其差值肯定为 0，如图 8-36 所示。

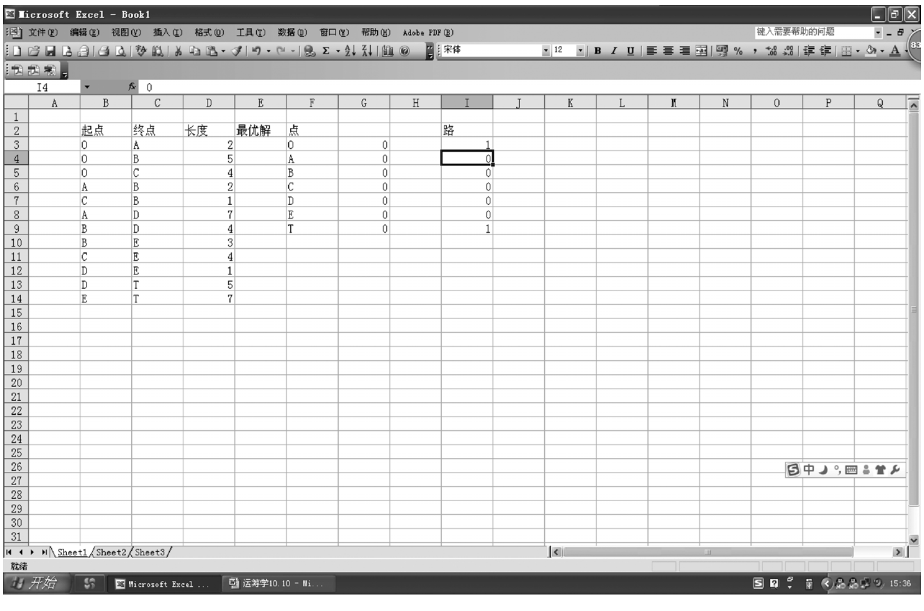


图 8-36

任选一个单元格为目标单元格，为距离与最优解的乘积之和，如图 8-37 所示。

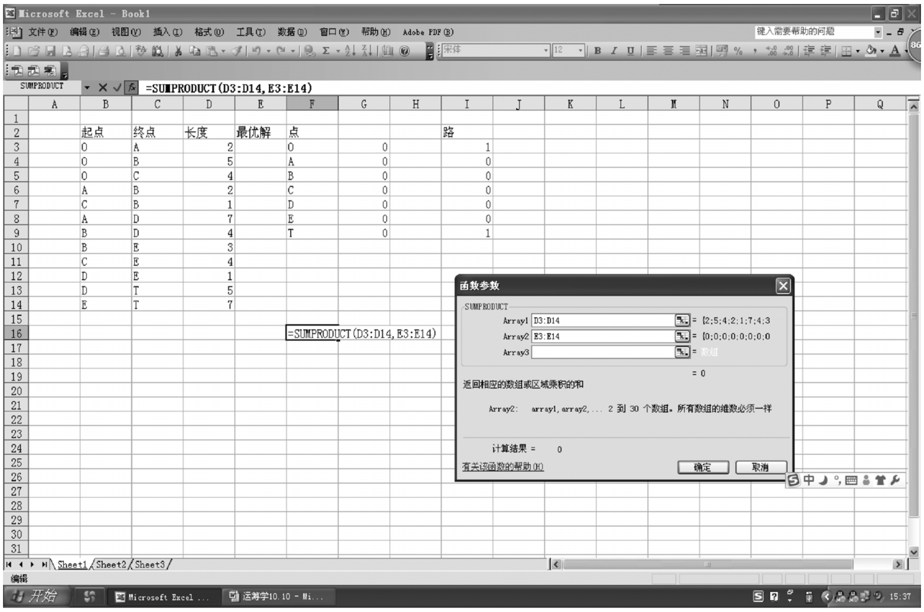


图 8-37

单击“工具”菜单中的“规划求解”命令项，打开“规划求解参数”对话框，选择目标单元格、“最小值”、可变单元格和约束条件，如图 8-38 所示。其中，约束条件是 7 个点的 G 列值分别等于对应的 I 列对应值。

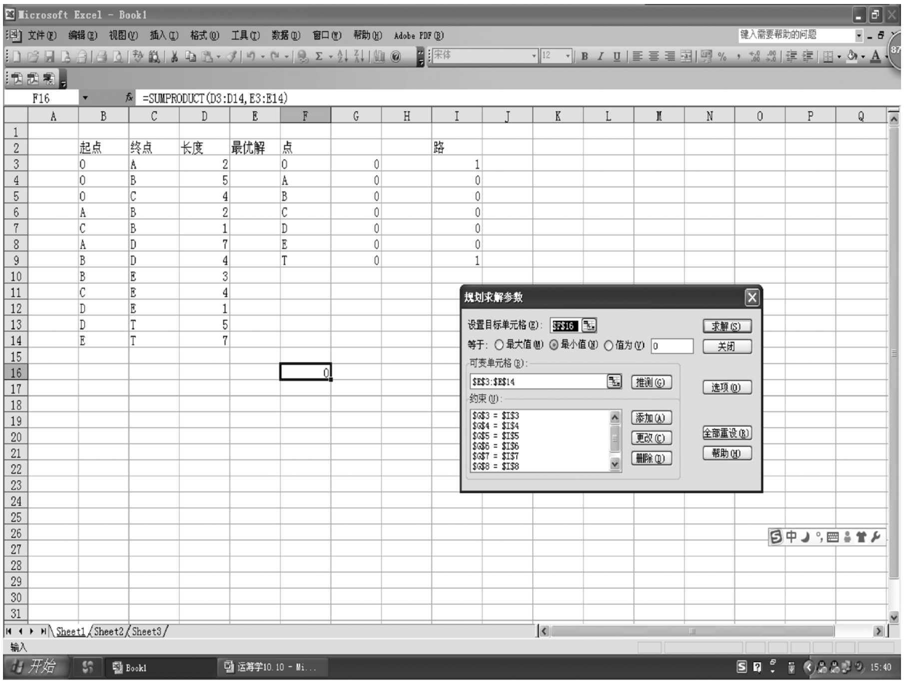
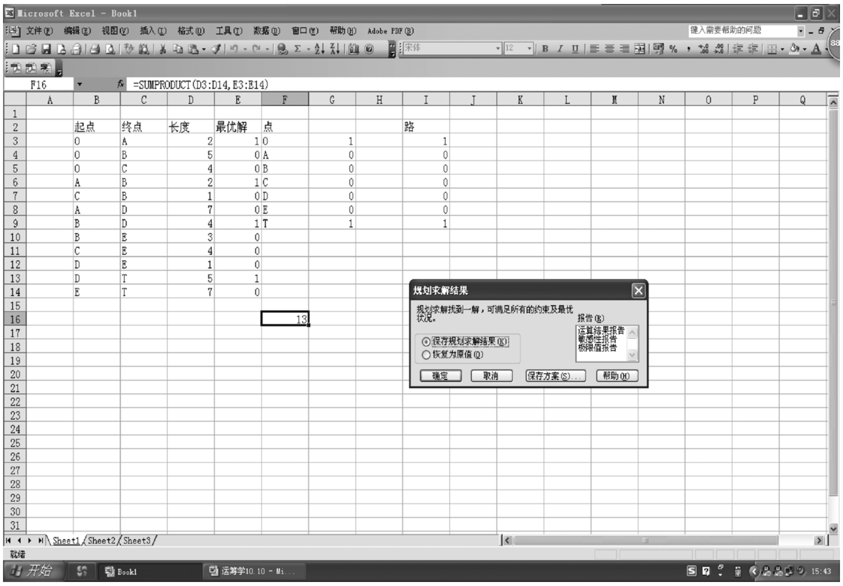


图 8-38

单击“选项”按钮，选中“假定线性模型”和“变量非负”，单击“确定”按钮，单击“求解”按钮，得到如图 8-39 所示结果。



起点	终点	长度	最优解	点		路
O	A	2	1	O	1	1
O	B	5	0	A	0	0
O	C	4	0	B	0	0
A	B	2	1	C	0	0
C	B	1	0	D	0	0
A	D	7	0	E	0	0
B	D	4	1	T	1	1
B	E	3	0			
C	E	4	0			
D	E	1	0			
D	T	5	1			
E	T	7	0			
				13		

图 8-39

即可得到最短路为 $O \to A \to B \to D \to T$，最短距离为 13。

对于最大流问题，如果构建模型，则可以采用线性规划模型求解。假设：$O \to A$，$O \to B$，$O \to C$，$A \to B$，$C \to B$，$A \to D$，$B \to D$，$B \to E$，$C \to E$，$D \to E$，$D \to T$，$E \to T$ 的流量分别为 x_1，x_2，…，x_{12} 。

目标函数是流入量或者流出量之和最大，约束条件包括：从起点出发的路只有一条，到终点的路也只有一条，且流入量和流出量相等，中间点到达的流量和出发的流量差值为 0，且每段弧的流量均要小于容量，于是可以构建如下线性规划模型：

$$\max z = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s.t:}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_{11} - x_{12} = 0 \\ x_1 - x_4 - x_6 = 0 \\ x_3 - x_5 - x_9 = 0 \\ x_2 - x_7 - x_8 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_{10} + x_{11} - x_6 - x_7 = 0 \\ x_8 + x_{11} + x_9 - x_{12} = 0 \\ x_1 \leqslant 5 \\ x_2 \leqslant 7 \\ x_3 \leqslant 4 \\ x_4 \leqslant 1 \\ x_5 \leqslant 2 \\ x_6 \leqslant 3 \\ x_7 \leqslant 4 \\ x_8 \leqslant 5 \\ x_9 \leqslant 4 \\ x_{10} \leqslant 1 \\ x_{11} \leqslant 9 \\ x_{12} \leqslant 6 \\ x_i \geqslant 0 (i = 1, \cdots, 12) \end{cases}$$

使用 LINGO 软件求解。首先运行该软件，在空白处输入如下程序(如图 8-40 所示)：

```
max=x1+x2+x3;
x1+x2+x3-x11-x12=0;
x1-x4-x6=0;
x2-x7-x8+x4+x5=0;
x3-x5-x9=0;
x10+x11-x6-x7=0;
x8+x10+x9-x12=0;
x1<=5;
x2<=7;
x3<=4;
x4<=1;
x5<=2;
x6<=3;
x7<=4;
x8<=5;
x9<=4;
x10<=1;
x11<=9;
x12<=6;
```

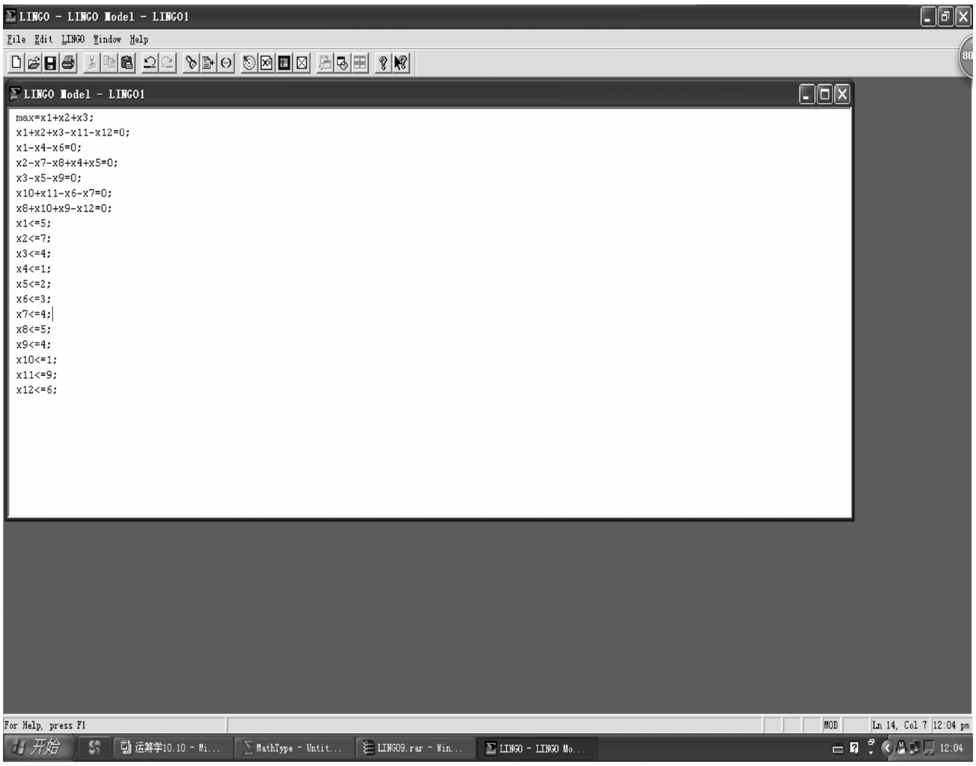


图 8-40

单击“LINGO”菜单中的“Solve”命令项，如图 8-41 所示。

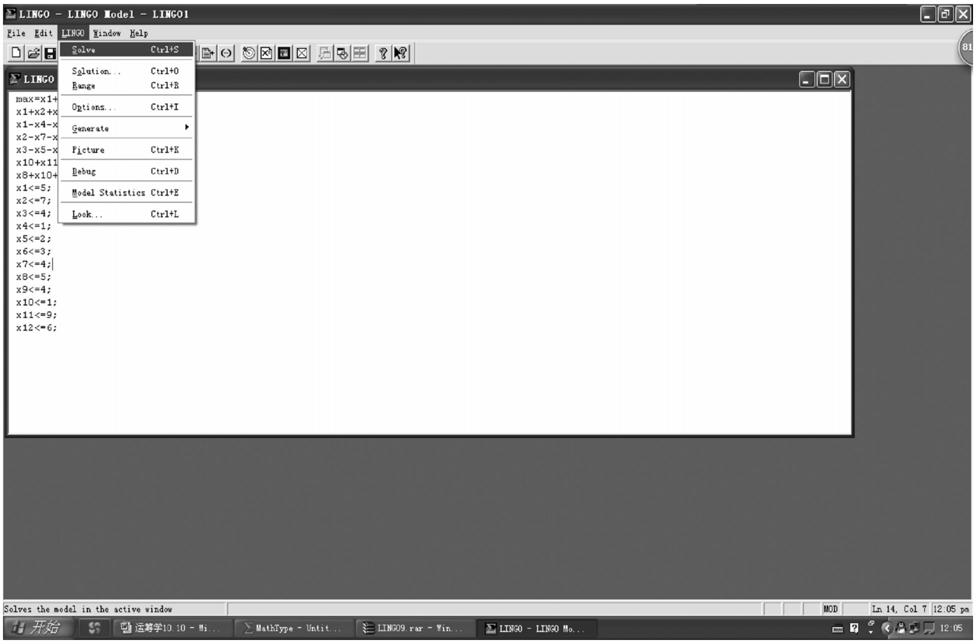


图 8-41

即可获得该问题的最优解，如图 8-42 所示。

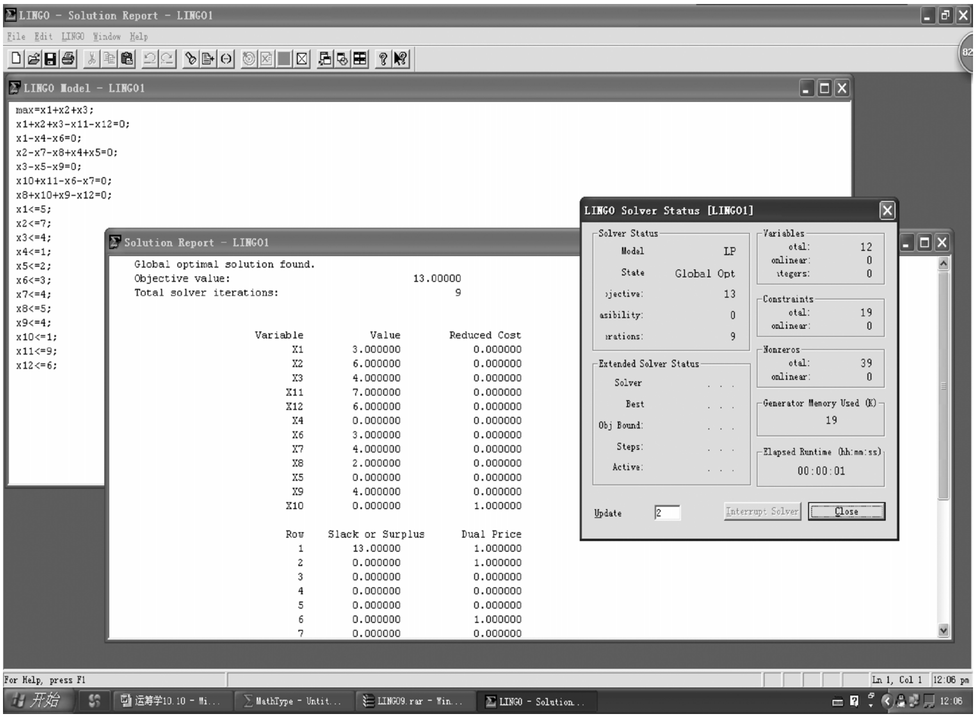


图 8-42

最优解可以直接读取。

如果采用 Excel 求解，首先确定每段弧的起点和终点，并标明容量。同时，确定最优解的单元格，并写上各个点，如图 8-43 所示。

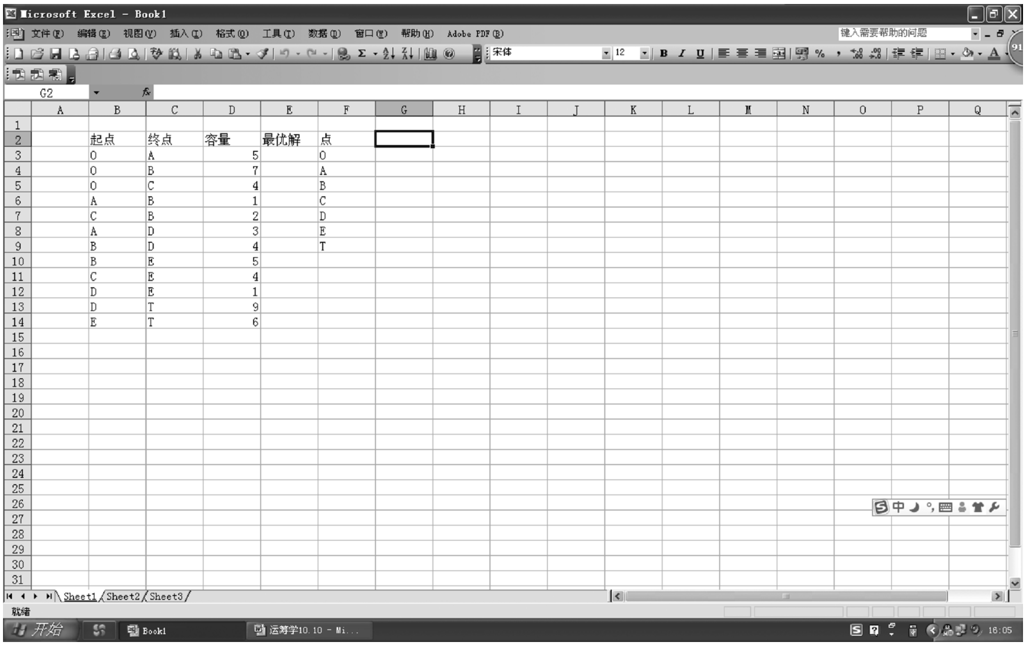


图 8-43

接着，计算每个点的流量。起始点为流出量，终止点为流入量，而每个中间点为流入量和流出量差值。起始点流量计算如图 8-44 所示；终止点流量计算如图 8-45 所示。

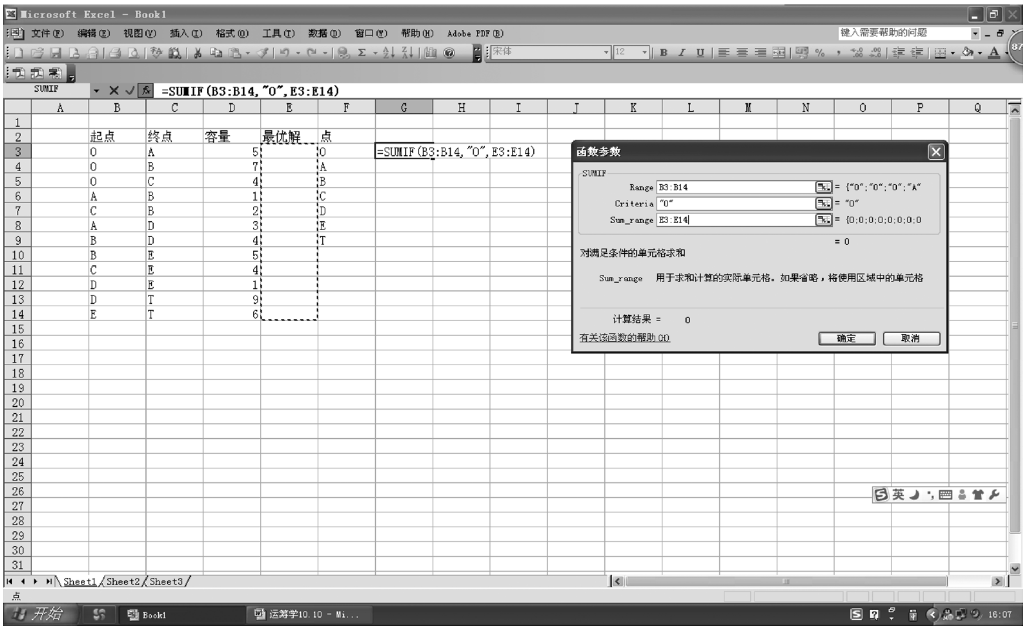


图 8-44

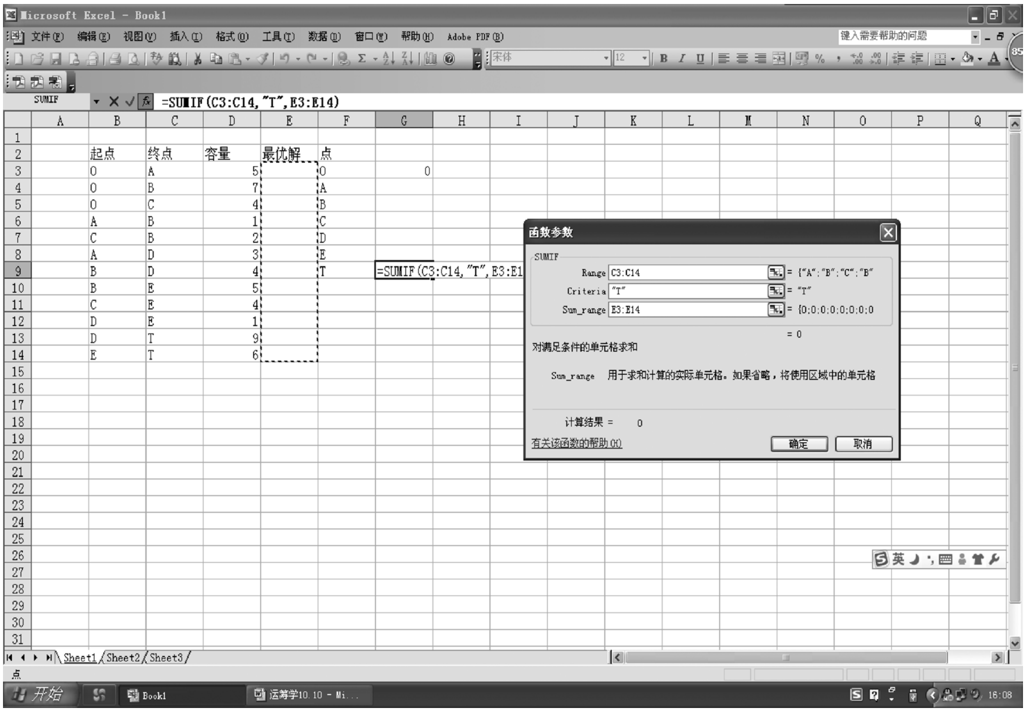


图 8-45

各个中间点的流量差值计算如图 8-46 所示。如 A 点的差值为

＝SUMIF (B3: B14, "A",E3: E14) - SUMIF (C3: C14, "A", E3: E14)

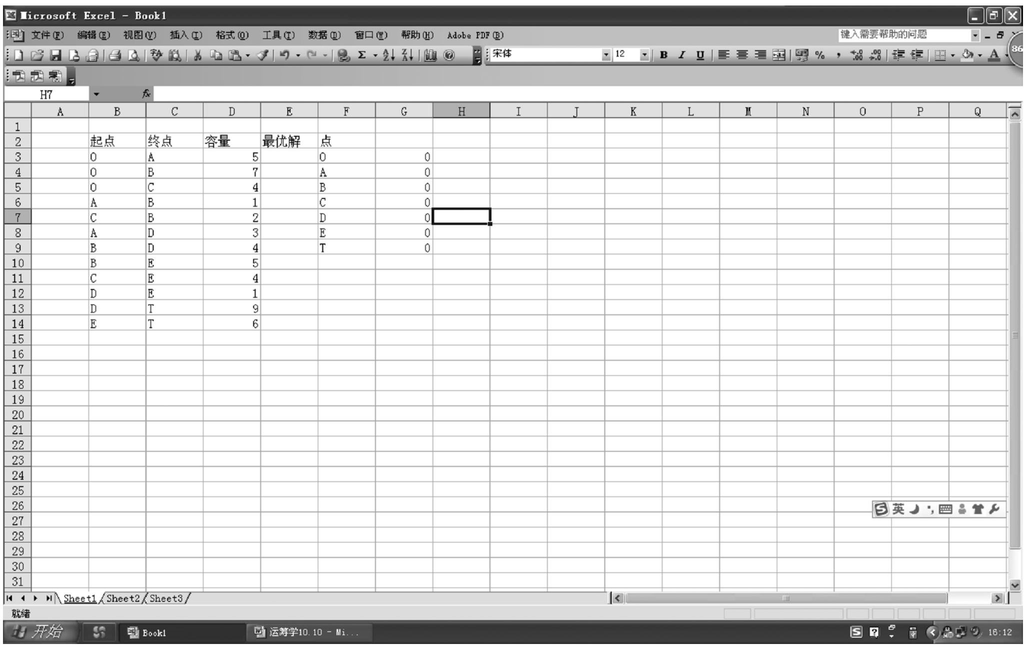


图 8-46

然后确定目标单元格。目标单元格的值为起点或终点的流量，如图 8-47 所示。

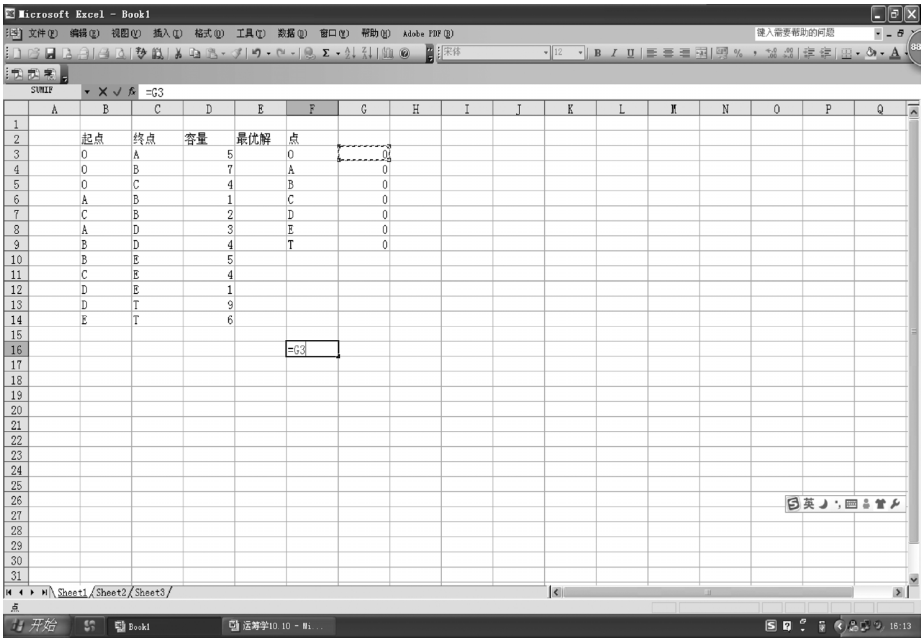


图 8-47

单击“工具”菜单中的“规划求解”命令项，选择目标单元格、可变单元格、约束条件，各个中间点的流入流出量差值为0。起点和终点的流量相等并小于各自的容量，如图 8-48 所示。

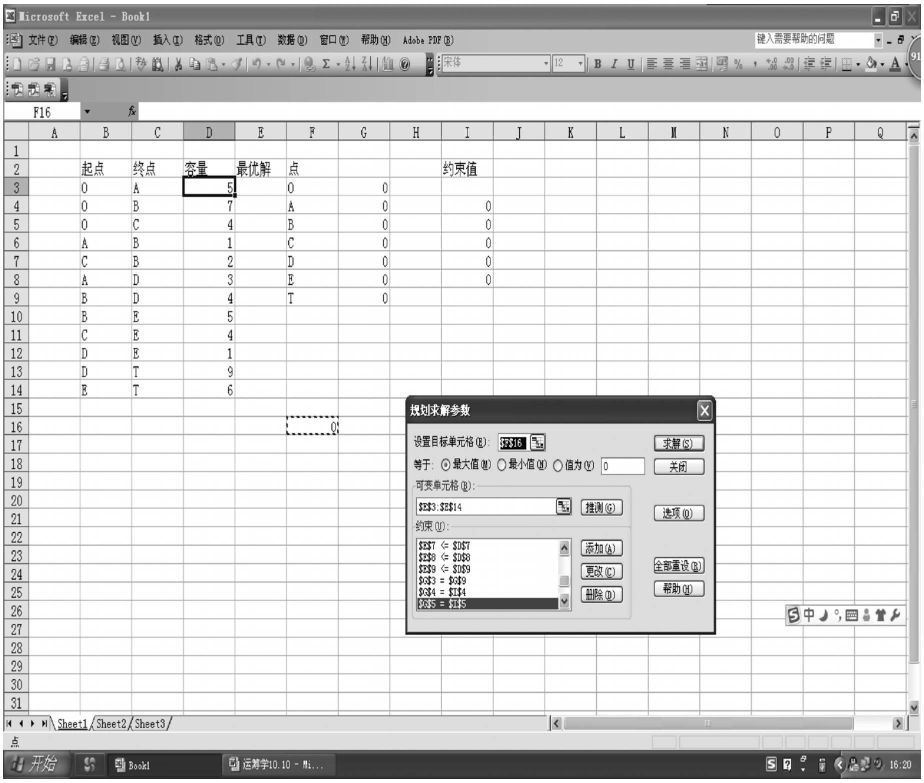


图 8-48

单击“选项”按钮，选中“线性模型”和“假定非负”，单击“确定”按钮，再单击“求解”按钮，如图 8-49 所示。

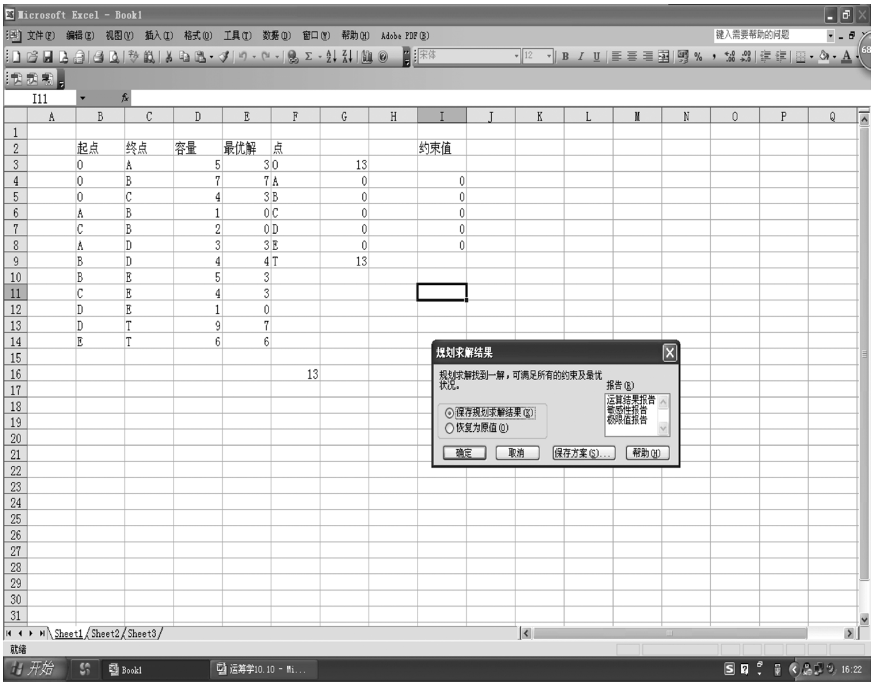
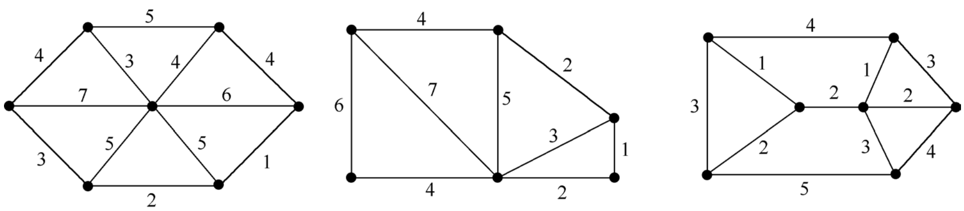


图 8-49

最优解可以直接读取，最大流量为 13。

练习题

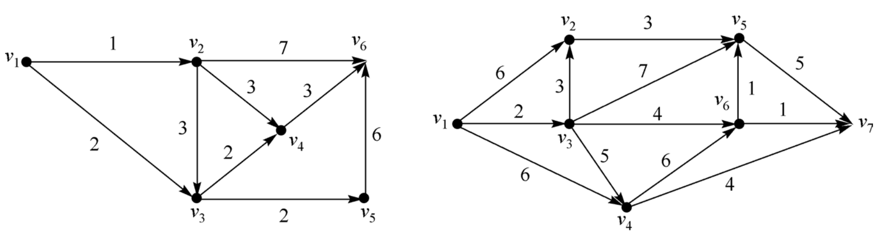
1. 分别用破圈法和避圈法找出图 8-50 中各图的最小树。



(a)　(b)　(c)

图 8-50

2. 用 Dijkstra 方法求图 8-51 中各图从 v_1 到各点的最短路。



(a)　(b)

图 8-51

3. 如图 8-52 所示，弧旁的数字是（c_{ij}, f_{ij}），试确定所有的截集，并求最小截集的容量。

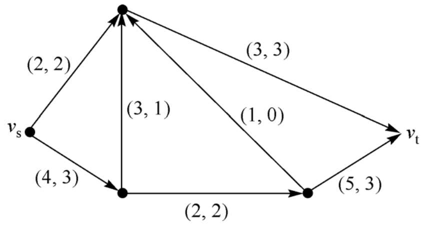


图 8-52　最大流图

4. 求图 8-53 所示网络的最大流（弧旁的数字是（c_{ij}, f_{ij}））。

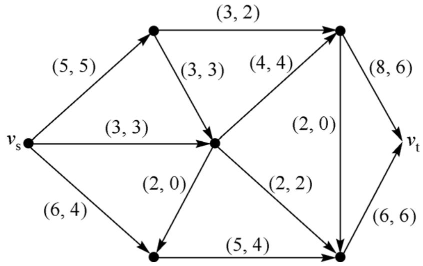


图 8-53

5. 现有六项不同的工作任务 A_i（$i = 1, \cdots, 6$）共十件，安排甲、乙、丙、丁四个人去完成，每项工作每人最多做一件。每人需完成的工作件数及对各项工作的喜爱程度见表 8-4，表中用分数 1 ~6 来衡量每人对各项工作的喜爱程度，分数越低的工作越喜欢做。现要求安排这四人的工作，使得分数的总和最少，以尽量满足他们对工作的喜爱要求。试将该问题表示成一个最小费用最大流问题。

表 8-6　工作数据表

喜爱程度 / 工作	人员				该工作件数
	甲	乙	丙	丁	
A_1	1	4	5	2	3
A_2	4	2	6	4	2
A_3	3	6	1	6	2
A_4	2	1	4	3	1
A_5	6	5	3	1	1
A_6	5	3	2	5	1
需要完成的工作件数	2	2	3	4	

6. 求解图 8-54 所示的中国邮递员问题（图中 v_7 处为邮局）。

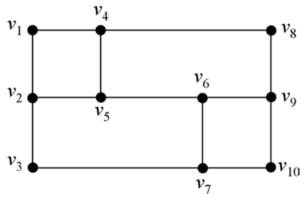


图 8-54　街道图

7. 已知表 8-7 所示资料。

表 8-7　项目工序数据表

工　序	紧前工序	工序时间/天	工　序	紧前工序	工序时间/天
A		10	H	F	10
B		8	I	F	4
C	A，B	6	J	G	12
D	B	10	K	H，I，J	16
E	C	24	L	C	8
F	D，E	4	M	L	24
G	F	4	N	K，M	4

（1）绘制网络图,并求出该工程从施工开始到全部结束的最短周期。

（2）若工序 L 拖期 10 天，对整个工程进度有何影响？

（3）若工序 J 的工序时间由 12 天缩短到 8 天，对整个工程进度有何影响？

（4）为保证整个工程进度在最短周期内完成，工序 I 最迟必须在哪一天开工？

第9章 存 储 论

本章概要

学习目标 学完本章后，你将能够：

1. 理解存储论的一些基本概念。
2. 识别、区分不同类型的存储模型。
3. 掌握几种确定型存储模型的形式。
4. 了解随机型存储模型的一般形式。

存储论引例

在日常生产和生活中常常会遇到以下一些问题：

(1)水电站在雨季到来之前，水库应蓄水多少？就发电的需要来说，当然蓄水以多为好，但就安全来说，如果雨季降雨量大，水库水位猛涨，若溢洪道排泄不及，就可能使水坝坍塌，破坏水电站，甚至给下游造成巨大的损失。因此，必须合理地调节水库的蓄水量。

(2)工厂生产需用原料，如果没有储存一定数量的原料，会发生停工待料现象；但如果原料储存过多，除积压资金外，还要支付一笔存储保管费用，对于原料有保鲜要求的，还可能遇到意外使其变质，损失更大。因此，必须给出合理的储存量。

(3)在商店里，若存储商品数量不足，会发生缺货现象，失去销售机会而减少利润；如果存量过多，一时售不出去，会造成商品积压，占用流动资金过多而且周转不开，也会造成经济损失。当然，顾客购买何种商品以及购买多少都带有随机性，在这种情况下商店的管理人员就应该研究商品的存储量问题。

专门研究这类有关存储问题的学科，就构成运筹学的一个分支，叫作存储论(inventory)，也叫库存论。

9.1　存储论概述

工厂为了生产，必须存储一些材料，这些存储物简称存储。与存储紧密相关的是输入和输出，输入使存储增加，输出使存储减少，存储论研究的主要内容是根据输出来确定输入，即何时输入、输入多少的问题，并不是研究如何保管存储的问题。

9.1.1　基本概念

在企业生产过程中，对物料的需求呈现间断式或者连续式特征，分别如图 9-1 和图 9-2 所示。

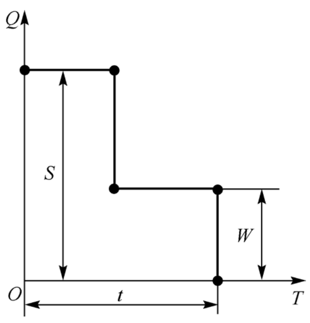


图 9-1　间断式需求

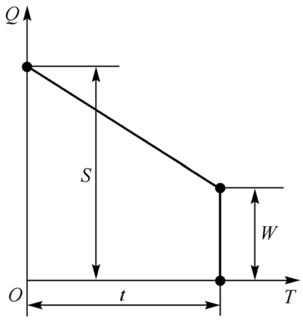


图 9-2　连续式需求

确定性的需求主要指固定的需求量，如钢厂每月按合同卖给电机厂硅钢片 10 吨。随机性需求指受到自然状态影响的需求，如书店每日卖出的书可能是 1000 本，也可能是 800 本。在样本的情况下，每日售书数量可能会呈现一定的统计规律，称为随机分布的需求。

存储随着需求的减少而减少，必须补充存货。补货的办法可能是向其他工厂购买，从订

货到货物进入“存储”往往需要一段时间，即为备货时间，也称为提前订货时间，即提前时间(lead-time)。提前时间可能很长或很短，也可能是确定的或随机的。

在存储论中，主要包括以下费用：

(1)存储费。包括货物占用资金应付的利息及使用仓库、保管货物、货物损坏变质等支出的费用。单位时间单位货物的存储费用可以用 C_1 表示。

(2)订货费。包括订购费用(固定费用)和货物的成本费用。订购费用，如手续费、电信往来、派人员外出采购等费用，与订货次数有关而与订货数量无关。货物的成本费用与订货数量有关(可变费用)，如货物本身的价格或运费等。如货物单价为 K 元，订购费用为 C_3 元，订货数量为 Q，则订货费用为 $C_3 + KQ$。

(3)生产费。补充存储时，如果不需要从别的工厂订货而由本厂自行生产，仍需要支出两项费用：一项是装备费用(或称准备、结束费用，是固定费用)，如更换模具、夹具需要工时费，或添置某些专用设备等的费用，用 C_3 表示；另一项是与生产产品的数量有关的费用，如材料费、加工费等(可变费用)。

(4)缺货费。物料供不应求时所引起的损失，如失去销售机会的损失、停工待料的损失以及不能履行合同而缴纳罚款等。单位时间短缺单位货物所发生的缺货费用 C_2 表示。在不允许缺货的情况下，缺货费为无穷大。

存储论解决的问题是：多长时间补充一次，每次补充的数量应该是多少。决定多长时间补充一次以及每次补充数量的策略称为存储策略。常见的策略有以下三种类型。

(1) t_0 循环策略。每隔 t_0 时间补充存储 Q。

(2) (s, S) 策略。当存储量 $x > s$ 时不补充；当 $x \leqslant s$ 时补充存储。补充量 $Q = S - x$ (即将存储量补充到 S)。

(3) (t, s, S) 混合策略。每经过 t 时间检查存储量 x，当 $x > s$ 时不补充；当 $x \leqslant s$ 时，补充存储量使之达到 S。

较优的存储策略是使总费用小，又避免因缺货影响生产(或对顾客失去信用)。

在研究存储策略时，首先需要对现实问题进行科学分析，抽象出存储模型的本质特征，接着验证模型的结果是否与现实贴近，如果差距较大，则需要重新修正模型的参数和常量。

9.1.2 存储模型

存储模型类型主要分为两类，即确定型模型和随机型模型。确定型模型是模型中的数据均为确定数值的存储模型，而随机型模型是模型中含有随机变量的存储模型。

确定型模型主要分为以下四个类别。

(1)模型1：不允许缺货，备货时间很短。

其假设条件如下：

①不允许缺货，即缺货费无穷大。

②当存储降至零时，可以立即得到补充(即备货时间或拖后时间很短，近似地看作零)。

③需求连续和均匀，设需求速度 R (单位时间的需求量)为常数，t 时间的需求量为 Rt。

④每次订货量不变，订购费不变(每次备货量不变，装配费不变)。

⑤单位存储费不变。

其存储量变化情况如图9-3所示。

(2)模型2：不允许缺货，生产需一定时间。

本模型的假设条件，除生产需要一定时间的条件外，其余与模型 1 的相同。

（3）模型 3：允许缺货，生产时间很短。

由于允许缺货，可以在存储降至零后，等一段时间再订货。企业可以少付几次订货的固定费用，少支付一些存储费用。当顾客遇到缺货时不受损失，或损失很小，企业除支付少量的缺货费外无其他损失，只是发生缺货现象可能对企业是有利的。除允许缺货外，其他假设条件与模型 1 相同。

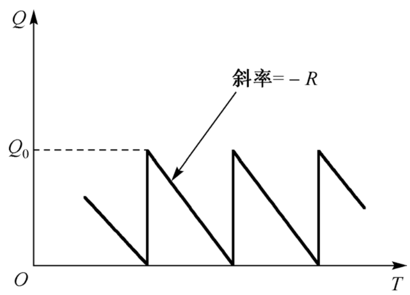


图 9-3　需求情况图

（4）模型 4：假设条件除允许缺货生产需一定时间外，其余与模型 1 相同。

随机型存储模型的需求是随机的，其概率或者分布已知。如果不希望因缺货而失去销售机会，也不希望因为滞销过多而积压资金，就需要采用新的储存策略，主要有：

（1）定期订货。但订货数量需要根据上一个周期末剩下货物的数量决定订货量，剩下的数量少，可以多订货；剩下的数量多，可以少订或不订货。

（2）定点订货。存储降到某一确定的数量时即订货，不考虑间隔的时间。这一数量值称为订货点，每次订货的数量不变。

（3）把定期订货与定点订货综合起来的方法（(s, S) 存储策略）。每隔一定时间检查一次存储，如果存储量高于一个数值 s，则不订货；小于 s 时则订货补充存储，订货量要使存储量达到 S。

9.2　确定型存储模型

确定型存储模型主要研究前述四类情形。基于各类确定型的假设条件，求解相关参数，指导实际库存决策。

9.2.1　不允许缺货，备货时间很短（模型 1）

假定每隔 t 时间补充一次存储，那么订货量为 $Q = Rt$。订购费为 C_3，货物单价为 K，则订货费为 $C_3 + KRt$，于是 t 时间的平均订货费为 $\dfrac{C_3}{t} + KR$，t 时间内的平均存储量为

$$\frac{1}{t}\int_0^t RT\mathrm{d}T = \frac{1}{2}Rt$$

单位时间内单位物品的存储费用为 C_1，t 时间内所需平均存储费用为 $\dfrac{1}{2}RtC_1$。

于是，t 时间内总的平均费用为 $C(t) = \dfrac{C_3}{t} + KR + \dfrac{1}{2}C_1Rt$。对其进行求导，有

$$\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{C_3}{t^2} + \frac{1}{2}C_1R = 0$$

于是 $t_0 = \sqrt{\dfrac{2C_3}{C_1R}}$。因 $\dfrac{\mathrm{d}^2C(t)}{\mathrm{d}t^2} > 0$，即每隔 t_0 时间订货一次可能使 $C(t)$ 最小。订货量为

$$Q_0 = Rt_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} \tag{9-1}$$

式(9-1)即经济订购批量公式(economic ordering quantity)，简称 E. O. Q 公式，也称平方根公式或经济批量公式(economic lot size)。由于 Q_0、t_0 与 K 无关，因此 $C(t) = \frac{C_3}{t} + \frac{1}{2}C_tRt$ 。

于是最佳费用 $C_0 = C(t_0) = C_3\sqrt{\frac{C_1R}{2C_3}} + \frac{1}{2}C_1R\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}} = \sqrt{2C_1C_3R}$ 。

【例 9-1】某汽车制造厂每月需要某种零部件 100 件，不允许缺货。已知该厂向其上游供货商订购这种零部件，每次订购的开支为 400 元。若这种零部件在厂内仓库存放，每月单位产品需要付出的存储费为 2 元，求汽车制造厂的最优订货批量及订货周期。

【解】这是一个不允许缺货的批量订货问题。其中，$R = 100$ 件/月，$C_3 = 400$ 元/次，$C_1 =$ 2 元/(件·月)。将数据代入式(9-1)，有

$$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}} = \sqrt{\frac{2\times 400}{2\times 100}} = 2$$

$$Q_0 = Rt_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} = \sqrt{\frac{2\times 400\times 100}{2}} = 200$$

即该厂每隔 2 个月订购一次，每次订购 200 件最合适。

9.2.2 不允许缺货，生产需一定时间(模型 2)

设生产批量为 Q，生产时间为 T，则生产速度为 $P = Q/T$。已知需求速度为 R（$R < P$），生产的产品一部分满足需求，剩余部分才作为存储，存储变化如图 9-4 所示。

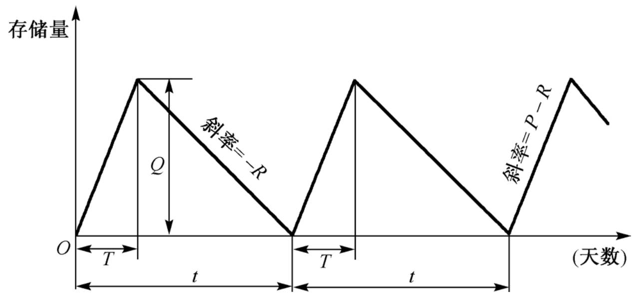


图 9-4 存储变化图

在 $[0, T]$ 区间内，存储以 $(P-R)$ 速度增加；在 $[T, t]$ 区间内，存储以速度 R 减少。于是 $(P-R)T = R(t-T)$，即 $PT = Rt$，$T = Rt/P$。

t 时间内的平均存储量为 $\frac{1}{2}(P-R)T$，所需存储费为 $\frac{1}{2}C_1(P-R)T$，所需装配费为 C_3，单位时间总费用(平均费用)为 $C(t)$，有

$$C(t) = \frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}C_1(P-R)Tt + C_3\right] = \frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}C_1(P-R)\frac{Rt^2}{P} + C_3\right]$$

设 $\min C(t) = C(t_0)$，求导可得 $t_0 = \sqrt{\frac{2C_3P}{C_1R(P-R)}}$。于是

$$Q_0 = \text{E. O. Q} = \sqrt{\frac{2C_3RP}{C_1(P-R)}}$$

$$\min C(t) = C(t_0) = \sqrt{2C_1C_3R\frac{P-R}{P}}$$

最佳生产时间为 $T_0 = \dfrac{Rt_0}{P} = \sqrt{\dfrac{2C_3R}{C_1P(P-R)}}$。

最高存储数量为 $S_0 = Q_0 - RT_0 = \sqrt{\dfrac{2C_3RP}{C_1(P-R)}} - R\sqrt{\dfrac{2C_3R}{C_1P(P-R)}} = \sqrt{\dfrac{2C_3R(P-R)}{C_1P}}$。

【例 9-2】某厂生产一种产品，生产率为 200 个/月，且装配费为 50 元。若产品需求均匀连续，且需求率为 100 个/月，月单位库存存储费为 2 元，求该厂的最优生产量、最优生产周期以及总费用。

【解】将 $P = 200$ 个/月，$R = 100$ 个/月，$C_3 = 50$ 元，$C_1 = 2$ 元代入式(9-1)，可得

$$Q_0 = \text{E. O. Q} = \sqrt{\frac{2C_3RP}{C_1(P-R)}} = \sqrt{\frac{2\times 50\times 100\times 200}{2\times(200-100)}} = 100$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3P}{C_1R(P-R)}} = \sqrt{\frac{2\times 50\times 200}{2\times 100\times 100}} = 1$$

$$\min C(t) = C(t_0) = \sqrt{2C_1C_3R\frac{P-R}{P}} = \sqrt{2\times 50\times 2\times 100\times\frac{100}{200}} = 100$$

即该厂的最优生产量为 100 个，每月生产 1 次，总费用为 100 元。

9.2.3　允许缺货，备货时间很短(模型 3)

设单位时间单位物品存储费用为 C_1，每次订购费为 C_3，缺货费为 C_2（单位缺货损失），R 为需求速度，求其最佳存储策略使得平均总费用最小。

假设最初存储量为 S，可满足 t_1 时间的需求。t_1 时间的平均存储量为 $\frac{1}{2}S$，在 $(t-t_1)$ 时间的存储为零，平均缺货量为 $\frac{1}{2}R(t-t_1)$。由于 S 仅能满足 t_1 时间的需求 $S = Rt_1$，有 $t_1 = S/R$。

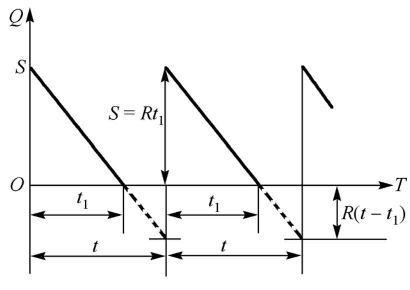


图 9-5　需求及时间参数图

t 时间内所需存储费为 $C_1\frac{1}{2}St_1 = \frac{1}{2}C_1\frac{S^2}{R}$；$t$ 时间内的缺货费为 $C_2\frac{1}{2}R(t-t_1)^2 = \frac{1}{2}C_2\frac{(Rt-S)^2}{R}$；订购费为 C_3；平均总费用为 $C(t, S) = \frac{1}{t}\left[C_1\frac{S^2}{2R} + C_2\frac{(Rt-S)^2}{2R} + C_3\right]$。

利用多元函数求极值的方法求 $C(t, S)$ 的最小值

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{1}{t}\left[C_1\frac{S}{R} - C_2\frac{Rt-S}{R}\right] = 0,\ R\neq 0,\ t\neq 0,\ C_1S - C_2(Rt-S) = 0$$

有
$$S = \frac{C_2Rt}{C_1+C_2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}=-\frac{1}{t^2}\left[C_1\frac{S^2}{2R}+C_2\frac{(Rt-S)^2}{2R}+C_3\right]+\frac{1}{t}[C_2(Rt-S)]=0,\ R\neq 0,\ t\neq 0$$

$$-C_1\frac{S^2}{2}-C_2\frac{(Rt-S)^2}{2}-C_3R+tR[C_2(Rt-S)]=0$$

将 S 值代入上式，消去 S，有 $t_0=\sqrt{\frac{2C_3(C_1+C_2)}{C_1RC_2}}$。于是

$$S_0=\sqrt{\frac{2C_2C_3R}{C_1(C_1+C_2)}},\quad \min C(t,S)=C_0(t_0,S_0)=\sqrt{\frac{2C_1C_2C_3R}{C_1+C_2}}$$

由于允许缺货最佳周期 t_0 为不允许缺货周期 t 的 $\sqrt{\frac{C_2+C_1}{C_2}}$ 倍，且 $\frac{C_2+C_1}{C_2}>1$，所以两次订货间隔时间延长了。

如果不允许缺货，订货量 $Q_0=Rt_0=\sqrt{\frac{2RC_3}{C_1}\frac{C_1+C_2}{C_2}}$；如果允许缺货，则存储量达到 S_0 即可，即 $S_0=\sqrt{\frac{2C_2C_3R}{C_1(C_1+C_2)}}$。于是

$$Q_0-S_0=\sqrt{\frac{2RC_3}{C_1}}\left(\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}-\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}\right)=\sqrt{\frac{2RC_3C_1}{C_2(C_1+C_2)}}$$

表示在 t_0 时间内的最大缺货量。在允许缺货条件下，存储策略是隔 t_0 时间订货一次，订货量为 Q_0，用 Q_0 中的一部分补足所缺货物，剩余部分 S_0 进入存储。

【例 9-3】某商店订购一批货物，每次订购费为 40 元，由缺货造成的损失为 0.5 元/个。若货物需求均匀连续，且需求率为 100 个/月，月单位库存存储费用为 1 元，求该厂的最优订货量、最优订货周期以及总费用。

【解】由条件可知，$R=100$ 个/月，$C_1=1$ 元，$C_2=0.5$ 元/个，$C_3=40$ 元，于是

$$Q_0=Rt_0=\sqrt{\frac{2RC_3}{C_1}\frac{C_1+C_2}{C_2}}=\sqrt{\frac{2\times 40\times 1.5}{1\times 100\times 0.5}}\approx 155$$

$$t_0=\sqrt{\frac{2C_3(C_1+C_2)}{C_1RC_2}}=\sqrt{\frac{2\times 40\times 1.5}{1\times 400\times 0.5}}\approx 1.5$$

$$\min C(t,S)=C_0(t_0,S_0)=\sqrt{\frac{2C_1C_2C_3R}{C_1+C_2}}=\sqrt{\frac{2\times 40\times 100\times 1\times 0.5}{1.5}}\text{元}\approx 51.6\text{元}$$

即该厂的最优订货量为 155 个，最优订货周期为 1.5 个月，总费用为 51.6 元。

9.2.4 允许缺货(需补足缺货)，生产需一定时间(模型 4)

取 $[0,t]$ 为一个周期，设 t_1 时刻开始生产，$[0,t_2]$ 时间内存储为零，B 表示最大缺货量。

$[t_1,t_2]$ 时间内除满足需求外，还补足 $[0,t_1]$ 时间内的缺货；$[t_2,t_3]$ 时间内满足需求后的产品进入存储，存储量以 $(P-R)$ 速度增加。S 表示存储量，t_3 时刻存储量达到最大，t_3 时刻停止生产。$[t_3,t]$ 时间内存储量以需求速度 R 减少。存储变化如图 9-6 所示。

图 9-6 中，最大缺货量 $B=Rt_1$ 或 $B=(P-R)(t_2-t_1)$，即 $Rt_1=(P-R)(t_2-t_1)$，于是 $t_1=\frac{P-R}{P}t_2$。

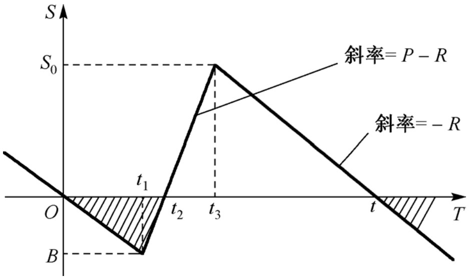


图9-6 存储变化图

最大存储量 $S=(P-R)(t_3-t_2)$ 或 $S=R(t-t_3)$，即 $(P-R)(t_3-t_2)=R(t-t_3)$，于是 $t_3=\frac{R}{P}t+\left(1-\frac{R}{P}\right)t_2$ 或 $t_3-t_2=\frac{R}{P}(t-t_2)$。

$[0,t]$ 时间内所需存储费为 $\frac{1}{2}C_1(P-R)(t_3-t_2)(t-t_2)$。消去 t_3，得 $\frac{1}{2}C_1(P-R)\frac{R}{P}(t-t_2)^2$，则缺货费为 $\frac{1}{2}C_2Rt_1t_2$。消去 t_1，得 $\frac{1}{2}C_2R\frac{(P-R)}{P}t_2^2$，则装配费为 C_3。

所以 $[0,t]$ 时间内的总平均费用为

$$C(t,t_2)=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}C_1\frac{(P-R)R}{P}(t-t_2)^2+\frac{1}{2}C_2\frac{(P-R)R}{P}t_2^2+C_3\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(P-R)R}{P}\left[C_1t-2C_1t_2+(C_1+C_2)\frac{t_2^2}{t}\right]+\frac{C_3}{t}$$

对上式进行求偏导，有

$$\frac{\partial C(t,t_2)}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{(P-R)R}{P}\left[C_1+(C_1+C_2)t_2^2\left(-\frac{1}{t^2}\right)\right]-\frac{C_3}{t}=0$$

$$\frac{\partial C(t,t_2)}{\partial t_2}=\frac{1}{2}\frac{(P-R)R}{P}\left[-2C_1+2(C_1+C_2)\frac{t_2}{t}\right]=0$$

于是 $$t_2=\frac{C_1}{C_1+C_2}t,\ \frac{1}{2}\frac{(P-R)R}{P}\left[C_1+(C_1+C_2)t_2^2\left(-\frac{1}{t^2}\right)\right]-\frac{C_3}{t^2}=0$$

消去 t_2，有 $\frac{1}{2}\frac{(P-R)R}{P}\left[C_1-(C_1+C_2)\frac{C_1^2}{(C_1+C_2)}\right]-\frac{C_3}{t^2}=0$。

由 $\frac{1}{2}\frac{(P-R)R}{P}\left[\frac{C_1^2+C_1C_2-C_1^2}{C_1+C_2}\right]-\frac{C_3}{t^2}=0$，得 $t^2=\frac{2P(C_1+C_2)C_3}{C_1C_2(P-R)R}$。于是

$$t=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\sqrt{\frac{P}{P-R}}$$

令其为 t_0，有 $t_2=\frac{C_2}{C_1+C_2}t_0=\frac{C_2}{C_1+C_2}\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\sqrt{\frac{P}{P-R}}$。于是，要使得 $C(t,t_2)$ 取得最小值，依据上述求导结果，有 $t=t_0$，$t_2=\frac{C_1}{C_1+C_2}t_0$。

于是，$Q_0=Rt_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\sqrt{\frac{P}{P-R}}$。最大存储量为

$$S_0=R(t_0-t_3)=R\left(t_0-\frac{R}{P}t_0-\frac{P-R}{P}t_2\right)=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}\sqrt{\frac{P-R}{P}}$$

最大缺货量为 $Rt_1 = \frac{R(P-R)}{P}t_2 = \sqrt{\frac{2C_1C_3R}{(C_1+C_2)C_2}}\sqrt{\frac{P-R}{P}}$，则

$$\min C(t_0, t_2) = C_0 = \sqrt{2C_1C_3R}\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}\sqrt{\frac{P-R}{P}}$$

【例 9-4】企业生产某种产品，正常条件下每天可生产 10 件。根据供货合同，需按每天 7 件供货。存储费为每件每天 0.13 元，缺货费用为每件每天 0.5 元，每次生产准备费用为 80 元，求最优存储策略。

【解】$R = 7$ 件/天，$P = 10$ 件/天，$C_1 = 0.13$ 元，$C_2 = 0.5$ 元/个，$C_3 = 80$ 元，于是

$$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}\sqrt{\frac{P}{P-R}} = \sqrt{\frac{2\times 80}{0.13\times 7}}\sqrt{\frac{0.13+0.5}{0.5}}\sqrt{\frac{10}{10-7}}\text{天} \approx 27.2\text{ 天}$$

$$Q_0 = Rt_0 = 7\times 27.2\text{ 件} = 190.4\text{ 件}$$

即每隔 27 天生产批量 190 件。

9.2.5 价格有折扣的存储问题

一种商品常常有零售价、批发价和出厂价。购买同一种商品的数量不同，单价也不同。一般情况下，购买数量越多，商品单价越低。在少数情况下，某种商品限额供应，超过限额部分的商品单价要提高。这涉及货物单价随订购（或生产）数量而变化的存储策略。除去货物单价随订购数量变化外，本模型其他条件均与模型 1 的假设相同。

记货物单价为 $K(Q)$，设 $K(Q)$ 按三个数量等级变化（如图 9-7 所示），即

$$K(Q) = \begin{cases} K_1 & 0 \leqslant Q < Q_1 \\ K_2 & Q_1 \leqslant Q < Q_2 \\ K_3 & Q_2 \leqslant Q \end{cases}$$

当订购量为 Q 时，一个周期内所需费用 $C(Q)$ 为 $\frac{1}{2}C_1Q\frac{Q}{R} + C_3 + K(Q)Q$，平均费用为 $\frac{1}{2}C_1\frac{Q}{R} + \frac{C_3}{Q} + K(Q)$。当订购数量在不同的区间内时，计算一个周期内所需费用和平均费用，只需将 $K(Q)$ 换成 K_1、K_2、K_3 即可。$C(Q)$ 和平均费用如图 9-8 所示。

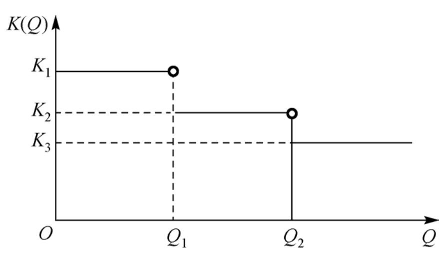


图 9-7　价格与订购量图

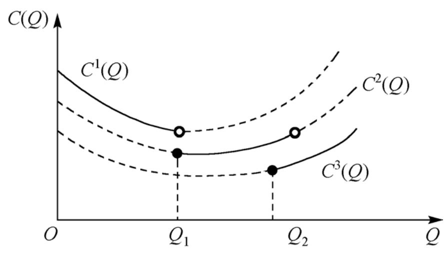


图 9-8　费用和平均费用图

由于平均费用 $C^1(Q)$、$C^2(Q)$、$C^3(Q)$ 之间只差一个常数 $K(Q)$，因此导函数相同。令导数为零，可解得 Q_0，但难以预计 Q_0 所在区间。

如果 $Q_0 < Q_1$，计算 $C^1(Q_0) = \frac{1}{2}C_1\frac{Q_0}{R} + \frac{C_3}{Q_0} + K_1$，$C^2(Q_1) = \frac{1}{2}C_1\frac{Q_1}{R} + \frac{C_3}{Q_1} + K_2$，$C^3(Q_2) =$

$\frac{1}{2}C_1\frac{Q_2}{R}+\frac{C_3}{Q_2}+K_3$。由 $\min\{C^1(Q_0),\ C^2(Q_1),\ C^3(Q_2)\}$ 得到单位最小费用的订购批量 Q^*。例如，$\min\{C^1(Q_0),\ C^2(Q_1),\ C^3(Q_2)\}=C^2(Q_1)$，则 $Q^*=Q_1$。

如果 $Q_1\leqslant Q_0\leqslant Q_2$，计算 $C^2(Q_0)$，$C^3(Q_2)$，由 $\min\{C^2(Q_0),\ C^3(Q_2)\}$ 决定 Q^*。

如果 $Q_2\leqslant Q_0$，则取 $Q^*=Q_0$。

如果单价折扣分 m 个等级，则在订购量为 Q 的情况下，其单价 $K(Q)$ 可以表示为

$$K(Q)=\begin{cases}K_1 & 0\leqslant Q<Q_1\\ K_2 & Q_1\leqslant Q<Q_2\\ \vdots & \\ K_j & Q_{j-1}\leqslant Q\leqslant Q_j\\ \vdots & \\ K_m & Q_{m-1}\leqslant Q\end{cases}$$

平均单位货物所需费用为 $C^j(Q)=\frac{1}{2}C_1\frac{Q}{R}+\frac{C_3}{Q}+K_j\ (j=1,2,\cdots,m)$。对 $C^1(Q)$ 求得极值点为 Q_0，若 $Q_{j-1}\leqslant Q_0<Q_j$，求 $\min\{C^j(Q_0),\ C^{j+1}(Q_1),\ \cdots,\ C^m(Q_{m-1})\}$，设得到的最小值为 $C^l(Q_{l-1})$，则取 $Q^*=Q_{l-1}$。

【例 9-5】设 $C_3=50$ 元/次，$C_1=3$ 元/(年·件)，$R=18\ 000$ 件/年，不同订购数量下的价格为 $K(Q)=\begin{cases}3 & Q<1500\\ 2.9 & 1500\leqslant Q<3000\\ 2.8 & Q\geqslant 3000\end{cases}$，试求最优订货批量。

【解】由于 $Q^*=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}=\sqrt{\frac{2\times 50\times 18\ 000}{3}}$ 件 ≈ 775 件 <1500 件，故需要比较以下三种情况下的总费用：

$$C(Q^*)=\left(\frac{1}{2}\times 3\times 775+3\times 18\ 000+\frac{50\times 18\ 000}{775}\right)\text{元/年}\approx 56\ 324\ \text{元/年}$$

$$C(1500)=\left(\frac{1}{2}\times 3\times 1500+2.9\times 18\ 000+\frac{50\times 18\ 000}{1500}\right)\text{元/年}\approx 55\ 050\ \text{元/年}$$

$$C(3000)=\left(\frac{1}{2}\times 3\times 3000+2.8\times 18\ 000+\frac{50\times 18\ 000}{3000}\right)\text{元/年}\approx 55\ 200\ \text{元/年}$$

所以，最优订货批量为 $Q=1500$ 件，最小总费用为 $C(1500)=55\ 050$ 元/年。

9.3　随机型存储模型

实际库存管理中，需求常常是随机的，故难以用前述模型来解决。为了有效管理随机需求下的库存管理问题，本节重点介绍随机型存储模型。

9.3.1　需求是随机离散的(模型 5)

报童每日售报数量是一个随机变量。每售出一份报纸赚 k 元，未能售出的报纸每份赔 h 元。假定每日售出报纸份数 r 的概率 $P(r)$ 已知，问报童每日最好准备多少份报纸？

上述问题实际上是确定每日报纸订货量 Q 为何值时，赚钱的期望值最大，即因不能售出报纸的损失及因缺货失去销售机会的损失，两者期望值之和最小。

设售出报纸份数为 r，概率 $P(r)$ 为已知 $\left(\sum_{r=0}^{\infty} P(r)=1\right)$。设报童订购报纸份数为 Q。当供过于求（$r \leqslant Q$）时，因不能售出而承担的损失期望值为 $\sum_{r=0}^{Q} h(Q-r)P(r)$；当供不应求（$r > Q$）时，因缺货而少赚钱的损失期望值为 $\sum_{r=Q+1}^{\infty} k(r-Q)P(r)$。两者的期望值之和为

$$C(Q)=h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)P(r)+k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)P(r)$$

报童订购报纸的份数 r 是离散变量且为整数，不能用求导数的方法求极值。订购报纸份数最佳数量 Q 应该满足：① $C(Q) \leqslant C(Q+1)$；② $C(Q) \leqslant C(Q-1)$。

基于①，可以推导如下：

$$h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)P(r)+k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)P(r) \leqslant h\sum_{r=0}^{Q+1}(Q+1-r)P(r)+k\sum_{r=Q+2}^{\infty}(r-Q-1)P(r)$$

简化得 $(k+h)\sum_{r=0}^{Q} P(r)-k \geqslant 0$，即 $\sum_{r=0}^{Q} P(r) \geqslant \frac{k}{k+h}$。

基于②，可以推导如下：

$$h\sum_{r=0}^{Q}(Q-r)P(r)+k\sum_{r=Q+1}^{\infty}(r-Q)P(r) \leqslant h\sum_{r=0}^{Q-1}(Q-1-r)P(r)+k\sum_{r=Q}^{\infty}(r-Q+1)P(r)$$

简化得 $(k+h)\sum_{r=0}^{Q-1} P(r)-k \leqslant 0$，即 $\sum_{r=0}^{Q-1} P(r) \leqslant \frac{k}{k+h}$，即最佳份数 Q 为

$$\sum_{r=0}^{Q-1} P(r) < \frac{k}{k+h} \leqslant \sum_{r=0}^{Q} P(r)$$

【例 9-6】某商店拟在新年期间出售一批日历画片，每售出 1000 张可盈利 700 元。如果在新年期间不能售出，必须削价处理。假定削价后一定可以售完，此时每 1000 张赔损 400 元。根据以往的经验，市场需求的概率见表 9-1。

表 9-1　市场需求概率表

需求量 r/千张	0	1	2	3	4	5
概率 $P(r)$	0.05	0.10	0.25	0.35	0.15	0.10

每年只能订货一次，问应订购日历画片几千张才能使获利的期望值最大？

【解】据题意，$k=7$，$h=4$，$\frac{k}{k+h} \approx 0.637$，有

$$P(0)=0.05,\ P(1)=0.10,\ P(2)=0.25,\ P(3)=0.35$$

$$\sum_{r=0}^{2} P(r)=0.40<0.637<\sum_{r=0}^{3} P(r)=0.75$$

即该店应订购日历画片 3 千张。

在模型 5 中，两次订货之间没有联系，都看作独立的一次订货。这种存储策略也可称为定期定量订货。

9.3.2　需求是连续的随机变量（模型 6）

设某货物的需求 r 是连续的随机变量，密度函数为 $\phi(r)$，$\phi(r)\mathrm{d}r$ 表示随机变量在 r 与

$r + \mathrm{d}r$ 之间的概率，分布函数为 $F(a) = \int_0^a \phi(r)\mathrm{d}r(a > 0)$。令货物单位成本为 K，单位售价为 P，单位存储费为 C_1，生产或订购的数量 Q 为多少时盈利期望值最大？

当订购数量为 Q 时，实际销售量应该是需求量和订购量 Q 的最小值 $\min[r, Q]$，此时需支付的存储费为 $C_1(Q) = \begin{cases} C_1 & (Q-r) r \leqslant Q \\ 0 & r > Q \end{cases}$。货物的成本为 KQ，订购量为 Q 时盈利为 $W(Q)$，$W(Q) = P\min[r, Q] - KQ - C_1(Q)$，于是

$$E[W(Q)] = \int_0^Q Pr\phi(r)\mathrm{d}r + \int_Q^{\infty} PQ\phi(r)\mathrm{d}r - KQ - \int_0^Q C_1(Q-r)\phi(r)\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{\infty} Pr\phi(r)\mathrm{d}r - \int_Q^{\infty} Pr\phi(r)\mathrm{d}r + \int_Q^{\infty} PQ\phi(r)\mathrm{d}r - KQ - \int_0^Q C_1(Q-r)\phi(r)\mathrm{d}r$$

$$= \underbrace{PE(r)}_{①} - \left\{P\underbrace{\int_Q^{\infty}(r-Q)\phi(r)\mathrm{d}r}_{②} + \underbrace{\int_0^Q C_1(Q-r)\phi(r)\mathrm{d}r}_{③} + \underbrace{KQ}_{④}\right\}$$

其中，①是常量或为平均盈利；②是因缺货失去销售机会损失的期望值；③是因滞销受到损失的期望值(只考虑了存储费)；④是常量。

令 $E[C(Q)] = P\int_Q^{\infty}(r-Q)\phi(r)dr + C_1\int_0^Q(Q-r)\phi(r)\mathrm{d}r + KQ$，有

$$\max E[W(Q)] = PE(r) - \min E[C(Q)]$$

当 Q 可以连续取值时，$E[C(Q)]$ 是 Q 的连续函数，可利用微分法求最小值，即

$$\frac{\mathrm{d}E[C(Q)]}{\mathrm{d}Q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Q}\left[P\int_Q^{\infty}(r-Q)\phi(r)\mathrm{d}r + C_1\int_0^Q(Q-r)\phi(r)\mathrm{d}r + KQ\right]$$

$$= C_1\int_0^Q \phi(r)\mathrm{d}r - P\int_Q^{\infty}\phi(r)\mathrm{d}r + K$$

令 $\frac{\mathrm{d}E[C(Q)]}{\mathrm{d}Q} = 0$，令 $F(Q) = \int_0^Q \phi(r)\mathrm{d}r$，有 $C_1F(Q) - P[1 - F(Q)] + K = 0$。于是 $F(Q) = \frac{P-K}{C_1+P}$，解出最优解 Q^*，Q^* 为 $E[C(Q)]$ 的驻点。

由于 $\frac{\mathrm{d}^2E[C(Q)]}{\mathrm{d}Q^2} = C_1\phi(Q) + P\phi(Q) > 0$，故 Q^* 为 $E[C(Q)]$ 的极小值点。

如果上一个阶段未售出的货物可以在第二阶段继续出售，存储策略也将有所不同。假设上一阶段未能售出的货物数量为 I，作为本阶段初的存储，有

$$\min E[C(Q)] = K(Q-I) + C_2\int_Q^{\infty}(r-Q)\phi(r)\mathrm{d}r + C_1\int_0^Q(Q-r)\phi(r)\mathrm{d}r$$

$$= -KI + \min\left\{C_2\int_Q^{\infty}(r-Q)\phi(r)\mathrm{d}r + C_1\int_0^Q(Q-r)\phi(r)\mathrm{d}r + KQ\right\}$$

利用 $F(Q) = \int_0^Q \phi(r)\mathrm{d}r = \frac{C_2-K}{C_1+C_2}$ 求出 Q^* 值，相应的存储策略是：当 $I \geqslant Q^*$ 时，本阶段不订货；当 $I < Q^*$ 时，本阶段应订货，订货量为 $Q = Q^* - 1$，使本阶段的存储达到 Q^*，这时盈利期望值最大。

这种策略也可以称作定期订货，是订货量不定的存储策略。

【例 9-7】某商店计划订购一批夏季时装，进价是 500 元，预计售价为 1000 元。夏季未售

完的时装要在季末进行削价处理，处理价为 200 元。根据以往的经验，该时装的销量服从[50，100]上的均匀分布，求最佳订货量。

【解】由于 $C_0 = 500 - 200 = 300$，$C_u = 1000 - 500 = 500$，最优订货批量 Q^* 应满足

$$F(Q) = \sum_0^Q f(x)\mathrm{d}x = \frac{C_u}{C_u + C_o} = \frac{500}{500 + 300} = 0.625$$

又因为服装的销量服从[50，100]上的均匀分布，所以有

$$F(Q) = P(x \leqslant Q) = \sum_{50}^{Q} \frac{1}{50}\mathrm{d}x = \frac{Q - 50}{50} = 0.625$$

得到 $Q = 81.25$，即订购 81 件最合算。

9.3.3 (s, S)型存储策略(模型 7)

(1)当需求是连续的随机变量时。

设货物单位成本为 K，单位存储费为 C_1，单位缺货费为 C_2，每次订购费为 C_3，需求 r 是连续的随机变量，密度函数为 $\phi(r)$，$\int_0^\infty \phi(r)\mathrm{d}r = 1$，分布函数 $F(a) = \int_0^a \phi(r)\mathrm{d}r$，$(a > 0)$，期初存储为 I（常量），订货量为 Q，此时期初存储达到 $S = I + Q$。问如何确定 Q 的值，可使损失的期望值最小(盈利的期望值最大)?

由于本阶段需订货费 $C_3 + KQ$，存储费的期望值为 $\int_0^{I+Q=S} C_1(S - r)\phi(r)\mathrm{d}r$，缺货费的期望值为 $\int_{S=I+Q}^\infty C_2(r - S)\phi(r)\mathrm{d}r$。于是

$$\begin{aligned} C(I + Q) = C(S) &= C_3 + \int_0^S C_1(S - r)\phi(r)\mathrm{d}r + \int_S^\infty C_2(r - S)\phi(r)\mathrm{d}r \\ &= C_3 + K(S - I) + \int_0^S C_1(S - r)\phi(r)\mathrm{d}r + \int_S^\infty C_2(r - S)\phi(r)\mathrm{d}r \end{aligned}$$

Q 可以连续取值，$C(S)$ 是 S 的连续函数。于是

$$\frac{\mathrm{d}C(S)}{\mathrm{d}S} = K + C_1\int_0^S \phi(r)\mathrm{d}r - C_2\int_S^\infty \phi(r)\mathrm{d}r = 0$$

有 $F(S) = \int_0^S \phi(r)\mathrm{d}r = \dfrac{C_2 - K}{C_1 + C_2}$。$\dfrac{C_2 - K}{C_1 + C_2}$严格小于1，称为临界值，以 N 表示。于是，本阶段存储策略是：首先由 $\int_0^S \phi(r)\mathrm{d}r = N$ 确定 S 的值，订货量 $Q = S - I$。

本阶段不订货可以节省订购费 C_3，如果存在一个数值 $s(s \leqslant S)$ 使下面不等式成立：

$$\begin{aligned} &Ks + C_1\int_0^s (s - r)\phi(r)\mathrm{d}r + C_2\int_s^\infty (r - s)\phi(r)\mathrm{d}r \\ &\leqslant C_3 + KS + C_1\int_0^S (S - r)\phi(r)\mathrm{d}r + C_2\int_S^\infty (r - S)\phi(r)\mathrm{d}r \end{aligned}$$

当 $s = S$ 时，不等式显然成立。当 $s < S$ 时，如果不止一个 s 的值使下列不等式成立，则选其中最小者作为本模型 (s, S) 存储策略的 s：

$$\begin{aligned} &C_3 + K(S - s) + C_1\left[\int_0^S (S - r)\phi(r)\mathrm{d}r - \int_0^s (s - r)\phi(r)\mathrm{d}r\right] + \\ &C_2\left[\int_S^\infty (r - S)\phi(r)\mathrm{d}r - \int_s^\infty (r - s)\phi(r)\mathrm{d}r\right] \geqslant 0 \end{aligned}$$

存储策略是：每阶段初期检查存储，当库存 $I < s$ 时，需订货，订货的数量为 Q ，$Q = S - I$ ；当库存 $I \geqslant s$ 时，本阶段不订货。

这种存储策略是定期订货但订货数量的多少受到期末库存 I 的影响，即 $Q = S - I$ 。不易清点数量的存储可分两堆存放，一堆数量为 s ，其余的另放一堆。平时从另一堆中取出，当动用数量为 s 的一堆时，期末需订货；如未动用 s 的一堆时，可不订货，俗称两堆法。

【例 9-8】某产品的单位成本为 $k = 3.0$ 元，单位存储费为 $C_1 = 1.0$ 元，单位缺货损失为 $C_2 = 5.0$ 元，每次订购费为 $C_3 = 5.0$ 元，需求量 x 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5} & 5 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 & x < 5 \text{ 或 } x > 10 \end{cases}$$

当用 (s, S) 型策略时，试求 s 和 S 。

【解】临界值 $N = \dfrac{C_2 - K}{C_1 + C_2} = \dfrac{5.0 - 3.0}{1.0 + 5.0} = \dfrac{1}{3}$ ，于是 β_2 ，即 $\int_0^S f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}$ ，$\dfrac{S - 5}{5} = \dfrac{1}{3}$，则 $S = 5 + \dfrac{5}{3} \approx 6.7$ 。

求 s 只需把相应的求和部分利用积分计算即可，即

$$Ks + \frac{1}{5}\int_5^s (s - x)\phi(x)\mathrm{d}x + C_2\int_s^{10}(x - s)\phi(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 5 + 3 \times \frac{20}{3} + \int_5^{\frac{20}{3}} \frac{1}{5}\left[\frac{20}{3} - x\mathrm{d}x + 5\int_{\frac{20}{3}}^{10} \frac{1}{5}\left(x - \frac{20}{3}\right]\mathrm{d}x\right.$$

简化得 $0.6s^2 - 8s + \dfrac{65}{3} = 0$ ，有 $s = 3.78$ 或 9.55 。9.55 超过 S 的值 6.7，不合理；3.78 不落在 [5，10] 内，也不符合。s 的值只能小于 5，但是不应是 3.78，因为 $s < 5$ 时有 $2s = \dfrac{20}{3}$ ，得 $s = \dfrac{10}{3} \approx 3.3$ ，即最低存储量 s 应为 3.3，最高存储量 S 应为 6.7。

当需求是离散的随机变量时，设需求 r 取值分别为 r_0、r_1、$\cdots$、$r_m (r_i < r_{i+1})$ ，其概率为 $P(r_0)$、$P(r_1)$、$\cdots$、$P(r_m)$，$\sum_{i=0}^{m} P(r_i) = 1$ 。原有存储量为 I（在本阶段内为常量），当本阶段开始时订货量为 Q ，存储量达到 $I + Q$ 。于是，本阶段所需订货费为 $C_3 + KQ$ ，存储费是当需求 $r < I + Q$ 时，未能售出的存储部分需付存储费；当需求 $r \geqslant I + Q$ 时，不需要付存储费。故所需存储费的期望值为 $\sum_{r \leqslant I+Q} C_1(I + Q - r)P(r)$ 。

当需求 $r > I + Q$ 时，$(r - I - Q)$ 部分需付缺货费。缺货费的期望值为 $\sum_{r > I+Q} C_2(r - I - Q)P(r)$ 。

三者之和为 $C(I + Q) = C_3 + KQ + \sum_{r \leqslant I+Q} C_1(I + Q - r)P(r) + \sum_{r > I+Q} C_2(r - I - Q)P(r)$ 。

$I + Q$ 表示存储所达到的水平，记 $S = I + Q$ ，上式可写为

$$C(S) = C_3 + K(S - I) + \sum_{r \leqslant S} C_1(S - r)P(r) + \sum_{r > S} C_2(r - S)P(r)$$

为求出 S ，使 $C(S)$ 最小，其解法可以描述如下：

(1) 将需求 r 的随机值按大小顺序排列为

$r_0, r_1, \cdots, r_i, r_{i+1}, \cdots, r_m$ ；$r_i < r_{i+1}$ ，$r_{i+1} - r_i = \Delta r_i \neq 0 (i = 0, 1, \cdots, m - 1)$

(2) S 只从 r_0, r_1, …, r_m 中取值。当 S 取值为 r_i 时，记为 S_i，即

$$\Delta S_i = S_{i+1} - S_i = r_{i+1} - r_i = \Delta r_i \neq 0(i = 0, 1, \cdots, m - 1)$$

(3)求 S 使 $C(S)$ 最小。因为

$$C(S_{i+1}) = C_3 + K(S_{i+1} - I) + \sum_{r \leqslant S_{i+1}} C_1(S_{i+1} - r)P(r) + \sum_{r > S_{i+1}} C_2(r - S_{i+1})P(r)$$

$$C(S_i) = C_3 + K(S_i - I) + \sum_{r \leqslant S_i} C_1(S_i - r)P(r) + \sum_{r > S_i} C_2(r - S_i)P(r)$$

$$C(S_{i-1}) = C_3 + K(S_{i-1} - I) + \sum_{r \leqslant S_{i-1}} C_1(S_{i-1} - r)P(r) + \sum_{r > S_{i-1}} C_2(r - S_{i-1})P(r)$$

为选出使 $C(S_i)$ 最小的 S 值，S_i 应满足：① $C(S_{i+1}) - C(S_i) \geqslant 0$；② $C(S_i) - C(S_{i-1}) \leqslant 0$。定义 $\Delta C(S_i) = C(S_{i+1}) - C(S_i)$，$\Delta C(S_{i-1}) = C(S_i) - C(S_{i-1})$，由①，有

$$\begin{aligned}\Delta C(S_i) &= K\Delta S_i + C_1\Delta S_i \sum_{r \leqslant S_i} P(r) - C_2\Delta S_i \sum_{r > S_i} P(r) \\ &= K\Delta S_i + C_1\Delta S_i \sum_{r \leqslant S_i} P(r) - C_2\Delta S_i[1 - \sum_{r \leqslant S_i} P(r)] \\ &= K\Delta S_i + (C_1 + C_2)\Delta S_i \sum_{r \leqslant S_i} P(r) - C_2\Delta S_i \geqslant 0\end{aligned}$$

因 $\Delta S_i \neq 0$，即 $K + (C_1 + C_2)\sum_{r \leqslant S_i} P(r) - C_2 \geqslant 0$，有 $\sum_{r \leqslant S_i} P(r) \geqslant \frac{C_2 - K}{C_1 + C_2} = N$。

由②，有 $\sum_{r \leqslant S_{i-1}} P(r) < \frac{C_2 - K}{C_1 + C_2} = N$。

综合以上两式，得到确定 S_i 的不等式 $\sum_{r \leqslant S_{i-1}} P(r) < N = \frac{C_2 - K}{C_1 + C_2} \leqslant \sum_{r \leqslant S_i} P(r)$，满足该式的 S_i 即为 S，即可得本阶段订货量 Q。同理有

$$Ks + C_1 \sum_{r \leqslant s} (s - r)P(r) + C_2 \sum_{r > s} P(r) \leqslant C_3 + KS + C_1 \sum_{r \leqslant S} (S - r)P(r) + C_2 \sum_{r > S} (r - S)P(r)$$

成立的 r 的值中最小者为 s。

【例 9-9】某厂对原料需求量的概率见表 9-2。

表 9-2　需求概率表

需求量 r	80	90	100	110	120
概率 $P(r)$	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

已知每次订货的订购费为 2825 元，货物价格为 850 元，存储费为 45 元，缺货费为 1250 元，求该厂的存储策略。

【解】计算临界值 $N = \frac{1250 - 850}{1250 + 45} = 0.309$。

由于 $P(x = 80) + P(x = 90) = 0.3 < 0.309$，故

$$P(x = 80) + P(x = 90) + P(x = 100) = 0.6 > 0.309$$。

所以 $S = 100$。

当 $s = 80$ 时，上述不等式左端为 94 250，右端为 94 255，所以 $s = 80$。

该厂存储策略每当存储小于等于 80 时，补充存储使存储量达到 100；当存储量大于 80 时，不需要补充。

本章要点

本章主要介绍了存储论的相关知识。介绍了库存论的基本概念和几种最重要的库存模型，即确定型存储模型和随机型存储模型。读者需要了解不同类型存储模型的前提条件，构造相应的变量假设，构建相应的存储模型并求解。

关键公式

- 模型 1：订货时间间隔 $t_0 = \sqrt{\dfrac{2C_3}{C_1 R}}$；订货批量 $Q_0 = Rt_0 = \sqrt{\dfrac{2C_3 R}{C_1}}$。
- 模型 2：最佳周期：$t_0 = \sqrt{\dfrac{2C_3 P}{C_1 R(P-R)}}$；生产批量 $Q_0 = \text{E. O. Q} = \sqrt{\dfrac{2C_3 RP}{C_1(P-R)}}$；

  最大存储量 $S_0 = Q_0 - RT_0 = \sqrt{\dfrac{2C_3 R(P-R)}{C_1 P}}$。
- 模型 3：最佳周期 $t_0 = \sqrt{\dfrac{2C_3(C_1+C_2)}{C_1 R C_2}}$；最大存储量 $S_0 = \sqrt{\dfrac{2C_2 C_3 R}{C_1(C_1+C_2)}}$；

  最小费用 $\min C(t, S) = C_0(t_0, S_0) = \sqrt{\dfrac{2C_1 C_2 C_3 R}{C_1 + C_2}}$。
- 模型 4：最大存储量 $S_0 = \sqrt{\dfrac{2C_3 R}{C_1}}\sqrt{\dfrac{C_2}{C_1+C_2}}\sqrt{\dfrac{P-R}{P}}$；

  最小费用 $\min C(t_0, t_2) = C_0 = \sqrt{2C_1 C_3 R}\sqrt{\dfrac{C_2}{C_1+C_2}}\sqrt{\dfrac{P-R}{P}}$。
- 模型 5：最佳数量确定式 $\sum\limits_{r=0}^{Q-1} P(r) < \dfrac{k}{k+h} \leqslant \sum\limits_{r=0}^{Q} P(r)$。

练习题

1. 某公司需从外部购置一种零件，年需要量为 10 000 件，单价 100 元，不允许缺货。每采购一次需要 1500 元，每件每年的存储费为该件单价的 20%，试求经济订货批量及年最小总费用。

2. 某工厂生产某种零件，每年需要量为 16 000 个，每月可生产 2000 个，每次生产的装配费为 4000 元，每个零件的存储费为 2 元，求每次生产的最佳批量。

3. 某工厂每年需要某种原料 600 kg，每次订货费为 800 元，每月每千克存储费为 5 元，若允许缺货，且每年每千克缺货费为 150 元，求最优订货量。

4. 某商店每年可卖出某种商品 1000 件，每次订购费用 8 元，每件商品每年存储费用为 1 元，单价为 5 元。批发商提出的价格折扣条件：

   ①订购 200 瓶及以上时，价格折扣为 5%；②订购 500 瓶及以上时，价格折扣为 10%。

   问该商店一次应订购多少件该商品？

5. 某商店销售鲜牛奶，每瓶成本为 2 元，售价为 2.5 元。如当日不能售出，则全部变质，已知该店鲜牛奶的销售量 r 服从泊松分布 $P(r) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!}$，平均售出量为 80 瓶，问该店每天应该进鲜牛奶多少瓶。

6. 某厂对原材料的需求概率见表 9-3?

表 9-3　需求分布表

需求量 r	20	30	40	50	60
概率 $P(r)$	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

已知每次订货的订购费为 1000 元，价格为 30 元，存储费为 20 元，缺货费为 80 元，求该厂的存储策略。

第 10 章　对　策　论

本章概要

学习目标　学完本章后，你将能够：

1. 了解对策论的基础知识。
2. 识别对策论的数学模型及相关定理。
3. 掌握对策论的几种不同解法。

对策论引例

战国时期，齐国的大将田忌很喜欢赛马，有一回，他和齐威王约定，要进行一场比赛。他们商量好，把各自的马分成上、中、下三等，要上马对上马，中马对中马，下马对下马。由于齐威王每个等级的马都比田忌的马强一些，所以比赛了几次，田忌都失败了。

有一次，田忌又失败了，觉得很扫兴，比赛还没有结束，就垂头丧气地准备离开赛马场，这时田忌的好朋友孙膑给他出了一个主意，让他再跟齐威王比赛一次，并约定从各自的上、中、下三个等级的马中各选一匹参赛，每匹马均只能参赛一次，每一次比赛双方各出一匹马，负者要付给胜者千金。虽然在同等级的马中，田忌的马不如齐王的马，但如果田忌的马比齐王的马高一等级，则田忌的马可取胜。孙膑的主意是：每次比赛时先让齐王牵出他要参赛的马，然后用下马对齐王的上马，用中马对齐王的下马，用上马对齐王的中马。比赛结果，田忌二胜一负，夺得千金。

还是同样的马，只是调换了一下比赛的出场顺序，就得到转败为胜的结果。由此看来，两个人各采取什么样的出马次序对胜负是至关重要的。

对策也叫博弈，是自古以来的政治家和军事家都很注意研究的问题。作为一门正式学科，是在20世纪40年代形成并发展起来的。直到1944年冯·诺依曼与摩根斯特恩的《博弈论与经济行为》一书出版，标志着现代系统博弈理论的初步形成。20世纪50年代，纳什建立了非合作博弈的“纳什均衡”理论，标志着博弈的新时代开始。纳什均衡的提出和不断完善，为博弈论广泛应用于经济学、管理学、社会学、政治学、军事科学等领域奠定了坚实的理论基础。

10.1　对策论概述

在日常生活中，经常会有一些相互之间具有斗争或竞争性质的行为，如下棋、打牌、体育比赛等。在经济活动中，各国之间、各公司企业之间的经济谈判及企业之间为争夺市场而进行的竞争等无一不具有斗争的性质。

10.1.1　对策行为的三要素

具有竞争或对抗性质的行为称为对策行为。参加斗争或竞争的各方各自具有不同的目标和利益。为了达到各自的目标和利益，各方必须考虑对手的各种可能的行动方案，并力图选取对自己最有利或最合理的方案。

对策论就是研究对策行为中，斗争各方是否存在着最合理行动方案，以及如何找到最合理行动方案的数学理论和方法。对策模型必须包括以下三个基本要素。

（1）局中人。有权决定自己行动方案的对策参加者。通常用 I 表示局中人的集合，如果有 n 个局中人，则 $I = 1, \cdots, n$ 。一个对策中一般至少要有两个局中人。局中人可理解为个人或集体，利益完全一致的参加者是一个局中人。同时，假定每个局中人都是“理智的”决策者，不存在利用其他局中人决策的失误来扩大自身利益的可能性。

（2）策略集。局中人选择的一个实际可行的完整的行动方案。每个局中人 k 都有自己的策略集 S_i , S_i 至少应包括两个策略。

（3）赢得函数（支付函数）。各局中人选定的策略形成的策略组称为一个局势，即若 S_i 是

第 i 个局中人的一个策略，则 n 个局中人的策略组为 $s = (s_1, \cdots, s_n)$，也是一个局势。全体局势的集合 S 可用各局中人策略集的笛卡儿积表示，即 $S = S_1 \times \cdots \times S_n$。对任意 $s \in S$，局中人 max 可得到一个赢得值 $H_i(s)$（赢得函数）。

【例 10-1】（市场购买力问题）据预测，某乡镇下一年的饮食品购买力有 4000 万元。乡镇企业和中心城市企业饮食品的生产情况是：乡镇企业有特色饮食品和低档饮食品两类，中心城市企业有高档饮食品和低档饮食品两类产品。它们争夺购买力的结局见表 10-1。乡镇企业和中心城市企业应如何选择对自己最有利的产品策略。

表 10-1　乡镇企业所得表　　（单位：万元）

乡镇策略	中心城市企业的策略	
	出售高档饮食品	出售低档饮食品
出售特色饮食品	2000	3000
出售一般饮食品	1000	3000

【例 10-2】（销售竞争问题）假定企业Ⅰ、Ⅱ均能向市场出售某产品，在时间区间 [0, 1] 内任一时点出售。企业Ⅰ在时刻 x 出售，企业Ⅱ在时刻 y 出售，则企业Ⅰ的收益（赢得）函数为

$$H(x, y) = \begin{cases} c(y - x) & x < y \\ 0.5c(1 - x) & x = y \\ c(1 - x) & x > y \end{cases}$$

两个企业各应选择什么策略对自己最有利？本例中，企业Ⅰ、Ⅱ可选择的策略均有无穷多个。

【例 10-3】（费用分摊问题）沿某一河流有相邻的三个城市 A、B、C，各城市可单独建立水厂，也可合作兴建一个大水厂。合建一个大水厂加上铺设管道的费用要比单独建三个小水厂的总费用少。合建大厂的方案能否实施，要看总的建设费用分摊得是否合理。如果某个城市分摊到的费用比它单独建设水厂的费用还多，则不会接受合作的方案。应如何合理地分摊费用，使合作兴建大水厂的方案得以实现？

【例 10-4】（拍卖问题）最常见的一种拍卖形式是先由拍卖商把拍卖品描述一番，然后提出第一个报价。接下来由买者报价，每一次报价都要比前一次高，最后谁出的价最高拍卖品即归谁所有。假设有 n 个买主报价分别为 p_1、$\cdots$、p_n，设 $p_n > p_{n-1} > \cdots > p_1$，则买主 n 只要报价略高于 p_{n-1}，就能买到拍卖品，即拍卖品实际上是在次高价格上卖出的。各买主之间可能知道他人的估价，每人应如何报价才能以较低的价格得到拍卖品？

上面的例子中有些是二人对策，有些是多人对策；有些是有限对策，有些是无限对策；有些是零和对策，有些是非零和对策；有些是合作对策，有些是非合作对策；等等。为了便于对不同的对策问题进行研究，可以根据不同方式进行分类：

（1）根据局中人的个数，分为二人对策和多人对策。

（2）根据各局中人的赢得函数的代数和是否为零，分为零和对策与非零和对策。

（3）根据各局中人之间是否允许合作，分为合作对策和非合作对策。

（4）根据局中人的策略集中的策略个数，分为有限对策和无限对策。

（5）根据策略的选择是否与时间有关，分为静态对策和动态对策。

（6）根据对策模型的数学特征，分为矩阵对策、连续对策、微分对策、阵地对策、凸对策、随机对策等。

在众多对策模型中，占有重要地位的是二人有限零和对策，又称矩阵对策。矩阵对策是一类最简单的对策模型，其研究思想和方法十分具有代表性，是研究其他对策模型的基础。

10.1.2 矩阵对策概述

矩阵对策指只有两个参加对策的局中人，每个局中人都只有有限个策略可供选择。在任一局势下，两个局中人的赢得之和总是等于零。

在矩阵对策中，一般用Ⅰ和Ⅱ表示两个局中人，局中人Ⅰ有 m 个纯策略(与后面的混合策略区别) $S_1 = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ ，局中人Ⅱ有 n 个纯策略 $S_2 = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ 。两个局中人选定纯策略 α_i 和 β_j 后，则可形成一个纯局势 (α_i, β_j) 。此时，局中人Ⅰ的赢得值为 α_{ij} ，赢得矩阵(或为局中人Ⅱ的支付矩阵)为 $\boldsymbol{A} = (\alpha_{ij})_{m\times n}$ 。由于是零和的，故局中人Ⅱ的赢得矩阵就是 $-\boldsymbol{A}$ 。于是，矩阵对策模型可记为 $G = \{\text{Ⅰ}, \text{Ⅱ}, S_1, S_2, \boldsymbol{A}\}$ 或 $G = \{S_1, S_2, \boldsymbol{A}\}$ 。各局中人需要选取对自己最有利的纯策略，以谋取最大的赢得(或最少损失)。

【例 10-5】求解矩阵对策 $G = \{S_1, S_2, \boldsymbol{A}\}$ ，$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ ，$S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 。

其中，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & -10 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 。

【解】局中人Ⅰ的最大赢得是9(α_3)。假定局中人Ⅱ考虑到局中人Ⅰ选择 α_3 的心理，选择 β_3 ，局中人Ⅰ于是选择 α_4 。因此“理智行为”下的决策应该是各个局中人应该从各自可能出现的最不利的情形中选择一种最有利的决策方案。

局中人Ⅰ的各个纯策略带来的最少赢得($\boldsymbol{A}$ 中每行的最小元素)分别为 -6、2、-10、-3，最小赢得为2。无论局中人Ⅱ选取何种纯策略，只要局中人Ⅰ选择 α_2 ，其收益均不会少于2。对局中人Ⅱ，各纯策略可能带来最不利的结果(矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中每列中最大元素)分别为9、2、8，最好的结果(损失最少)也是2，无论局中人Ⅰ选取何种纯策略，只要局中人Ⅱ选择 β_2 ，其损失均不会多于2。因此，两个局中人的理智策略是 α_2 和 β_2 ，局中人Ⅰ的赢得和局中人Ⅱ的损失绝对值相等。上述选择过程可以描述为定义1。

定义1：设 $G = \{S_1, S_2, A\}$ ，$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ ，$S_2 = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ ，$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$。若 $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = a_{i^*j^*}$ 成立，记 $V_G = a_{i^*j^*}$ ，则称 V_G 为对策 G 的值，纯局势 $(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$ 为 G 在纯策略下的解(或平衡局势)，α_{i^*} 与 β_{j^*} 分别是局中人Ⅰ、Ⅱ的最优纯策略。

【例 10-6】求解矩阵对策 $G = \{S_1, S_2, \boldsymbol{A}\}$ 。其中，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 16 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 。

【解】由于 $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = a_{22} = 2$ ，于是 $V_G = 2$ ，G 的解为 (α_2, β_2) ，α_2 与 β_2 分别是局中人Ⅰ和Ⅱ的最优纯策略。

定理1：矩阵对策 $G = \{S_1, S_2, A\}$ 在纯策略意义下有解的充分必要条件是：存在纯局势 $(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$ ，使得对一切 $i = 1, \cdots, m$; $j = 1, \cdots, n$ 均有 $a_{ij^*} \leqslant a_{i^*j^*} \leqslant a_{i^*j}$ 。(证明见附录D)

$a_{i^*j^*}$ 既是 $\boldsymbol{A} = (\alpha_{ij})_{m\times n}$ 中第 i^* 行的最小值，又是第 j^* 列的最大值，则 $a_{i^*j^*}$ 是对策的值，

且（α_{i^*}，β_{j^*}）就是对策的解。当局中人Ⅰ选取了 α_{i^*} 后，局中人Ⅱ只有选择 β_{j^*} 才能损失最小；反之，当局中人Ⅱ选取了 β_{j^*} 后，局中人Ⅰ得到最大的赢得也只能选取 α_{i^*}。

定义 2：设 $f(x, y)$ 是在 $x \in A$ 及 $y \in B$ 上的实值函数，如果存在 $x^* \in A$，$y^* \in B$，对一切 $x \in A$ 和 $y \in B$，有 $f(x, y^*) \leqslant f(x^*, y^*) \leqslant f(x^*, y)$，则称（$x^*$，$y^*$）为函数 f 的一个鞍点。

矩阵对策 G 在纯策略意义下有解，且 $V_G = a_{i^*j^*}$ 的充要条件是 $a_{i^*j^*}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个鞍点。同时，矩阵对策的解可能不唯一。

【例 10-7】设矩阵对策 $G = \{S_1, S_2, \boldsymbol{A}\}$，$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$，$S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$，赢得矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 11 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 8 & 7 & 8 \\ 10 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

【解】直接在赢得表上计算，有 $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = a_{i^*j^*} = 8$，$V_G = 8$。其中，$i^* = 1, 3$；$j^* = 2, 4$。故（$\alpha_1$，$\beta_2$），（$\alpha_1$，$\beta_4$），（$\alpha_3$，$\beta_2$），（$\alpha_3$，$\beta_4$）四个局势都是对策的解。

性质 1：无差别性。若（α_{i_1}，β_{j_1}）和（α_{i_2}，β_{j_2}）是对策 G 的两个解，则 $a_{i_1j_1} = a_{i_2j_2}$。

性质 2：可交换性。若（α_{i_1}，β_{j_1}）和（α_{i_2}，β_{j_2}）是对策 G 的两个解，则（α_{i_1}，β_{j_2}）和（α_{i_2}，β_{j_1}）也是解。

10.1.3　矩阵对策的混合策略

对矩阵对策 $G = \{S_1, S_2, \boldsymbol{A}\}$，局中人Ⅰ的赢得至少是 $v_1 = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$，局中人Ⅱ的损失至多是 $v_2 = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$，一般总有 $v_1 \leqslant v_2$。当 $v_1 = v_2$ 时，矩阵对策 G 存在纯策略意义下的解，且 $V_G = v_1 = v_2$。

对赢得矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$，有 $v_1 = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 4$，$i^* = 2$，$v_2 = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 5$，$j^* = 1$，即 $v_2 = a_{21} = 5 > 4 = v_1$。对局势（$\alpha_2$，$\beta_1$），局中人Ⅰ将赢得 5，多于 $v_1 = 4$。故局中人Ⅱ会考虑选择 β_2，局中人Ⅰ会选择 α_1 使赢得为 6，局中人Ⅱ可能仍采取 β_1 来对付局中人Ⅰ的策略 α_1，局中人Ⅰ选择 α_1 或 α_2 的可能性以及局中人Ⅱ选择 β_1 和 β_2 的可能性都不能排除。对两个局中人来说，不存在一个双方均可接受的平衡局势。

定义 3：设矩阵对策 $G = \{S_1, S_2, \boldsymbol{A}\}$，$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$，$S_2 = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$，$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$，记

$$S_1^* = \left\{x \in E^m \,\middle|\, x_i \geqslant 0;\ i = 1, \cdots, m;\ \sum_{i=1}^m x_i = 1\right\},\ S_2^*$$
$$= \left\{y \in E^m \,\middle|\, y_j \geqslant 0;\ j = 1, \cdots, n;\ \sum_{j=1}^n y_j = 1\right\}$$

则 S_1^* 和 S_2^* 分别称为局中人Ⅰ和Ⅱ的混合策略集，$x \in S_1^*$ 和 $y \in S_2^*$ 分别称为局中人Ⅰ和Ⅱ的混合策略。(x, y) 为一个混合局势，局中人Ⅰ的赢得函数 $E(x, y) = x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}y = \sum\limits_i \sum\limits_j a_{ij}x_iy_j$，于是得到一个新的对策 $G^* = \{S_1^*, S_2^*, E\}$，则称 G^* 为对策 G 的混合扩充。

于是，纯策略是混合策略的特例。α_k 等价于混合策略 $x=(x_1,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}\in S_1^*$，其中 $x_i=1$，$i=k$；$x_i=0$，$i\neq k$。混合策略 $x=(x_1,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$ 可理解为当两个局中人多次重复进行对策 G 时，局中人Ⅰ分别采取纯策略 α_1，α_2，$\cdots$，α_m 的频率。

在混合策略中，局中人Ⅰ可保证自己的赢得期望值不少于 $v_1=\max\limits_{x\in S_1^*}\min\limits_{y\in S_2^*}E(x,y)$，局中人Ⅱ可保证自己的所失期望值至多是 $v_2=\min\limits_{x\in S_1^*}\max\limits_{y\in S_2^*}E(x,y)$。$E(x,y)$ 是欧氏空间 E^{m+n} 内有界闭集 D 上的连续函数，其中

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x_i\geqslant 0,\ y_j\geqslant 0;\ i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n;\ \sum_{i=1}^{m}x_i=1;\ \sum_{j=1}^{n}y_j=1\right\}$$

对固定的 x，$E(x,y)$ 是 S_2^* 上的连续函数，故 $\min\limits_{y\in S_2^*}E(x,y)$ 存在，而且也是 S_1^* 上的连续函数，故 $\max\limits_{x\in S_1^*}\min\limits_{y\in S_2^*}E(x,y)$ 存在。同样可说明 $\min\limits_{y\in S_2^*}\max\limits_{x\in S_1^*}E(x,y)$ 存在。

假设 $\max\limits_{x\in S_1^*}\min\limits_{y\in S_2^*}E(x,y)=\min\limits_{y}E(x^*,y)$，$\min\limits_{y\in S_2^*}\max\limits_{x\in S_1^*}E(x,y)=\max\limits_{x}E(x,y^*)$，于是

$$v_1=\min_{y\in S_2^*}E(x^*,y)\leqslant E(x^*,y^*)\leqslant\max_{x\in S_1^*}E(x,y^*)=v_2$$

定义 4：设 $G^*=\{S_1^*,S_2^*,E\}$ 是矩阵对策 $G=\{S_1,S_2,\boldsymbol{A}\}$ 的混合扩充，如果 $\max\limits_{x\in S_1^*}\min\limits_{y\in S_2^*}E(x,y)=\min\limits_{y\in S_2^*}\max\limits_{x\in S_1^*}E(x,y)$，记其值为 V_G，称 V_G 为对策 G^* 的值；称混合局势 (x^*,y^*) 中 x^* 和 y^* 分别称为局中人Ⅰ和Ⅱ的最优混合策略（或简称最优策略）。

定理 2：矩阵对策 $G=\{S_1,S_2,\boldsymbol{A}\}$ 在混合策略意义下有解的充要条件是：存在 $x^*\in S_1^*$，$y^*\in S_2^*$，使 (x^*,y^*) 为函数 $E(x,y)$ 的一个鞍点，即对一切 $x^*\in S_1^*$，$y^*\in S_2^*$，有

$$E(x,y^*)\leqslant E(x^*,y^*)\leqslant E(x^*,y)\tag{10-1}$$

【例 10-8】考虑矩阵对策 $G=\{S_1,S_2,\boldsymbol{A}\}$。其中，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&6\\5&4\end{pmatrix}$。

【解】设 $x=(x_1,x_2)$ 为局中人Ⅰ的混合策略，$y=(y_1,y_2)$ 为局中人Ⅱ的混合策略，则

$$S_1^*=\{(x_1,x_2)\mid x_1,x_2\geqslant 0,\ x_1+x_2=1\}$$
$$S_2^*=\{(y_1,y_2)\mid y_1,y_2\geqslant 0,\ y_1+y_2=1\}$$

局中人Ⅰ的赢得期望值为

$$E(x,y)=3x_1y_1+6x_1y_2+5x_2y_1+4x_2y_2=-4\left(x_1-\frac{1}{4}\right)\left(y_1-\frac{1}{2}\right)+\frac{9}{2}$$

当 $x^*=\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$，$y^*=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 时，$E(x^*,y^*)=\frac{9}{2}$，$E(x^*,y)=E(x,y^*)=\frac{9}{2}$，满足式(10-1)，于是 $x^*=\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$ 和 $y^*=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 分别为局中人Ⅰ和Ⅱ的最优策略，$V_G=\frac{9}{2}$。

10.1.4　矩阵对策的性质

当局中人Ⅰ选取纯策略 α_i 时，赢得函数为 $E(i,y)=\sum\limits_{j}a_{ij}y_j$；当局中人Ⅱ选取纯策略 β_j 时，赢得函数为 $E(x,j)=\sum\limits_{i}a_{ij}x_i$，于是

$$E(x, y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j = \sum_i (\sum_j a_{ij} y_j) x_i = \sum_i E(i, y) x_i = \sum_j E(x, j) y_j$$

定理 3：设 $x^* \in S_1^*$，$y^* \in S_2^*$，则 (x^*, y^*) 是 G 的解的充要条件是：对任意 $i = 1, \cdots, m$ 和 $j = 1, 2, \cdots, n$，有 $E(i, y^*) \leqslant E(x^*, y^*) \leqslant E(x^*, j)$。

定理 4：设 $x^* \in S_1^*$，$y^* \in S_2^*$，则 (x^*, y^*) 为 G 的解的充要条件是：存在数 v，使得 x^* 和 y^* 分别是不等式组①和②的解，且 $v = V_G$。

$$① \begin{cases} \sum_i a_{ij} x_i \geqslant v & j = 1, \cdots, n \\ \sum_i x_i = 1 & \\ x_i \geqslant 0 & i = 1, \cdots, m \end{cases}; \qquad ② \begin{cases} \sum_j a_{ij} y_j \leqslant v & i = 1, \cdots, m \\ \sum_j y_j = 1 & \\ y_j \geqslant 0 & j = 1, \cdots, n \end{cases}。$$

定理 5：对任一矩阵对策 $G = \{S_1, S_2, \boldsymbol{A}\}$，一定存在混合策略意义下的解。

定理 6：设 (x^*, y^*) 是矩阵对策 G 的解，$v = V_G$，若 $x_{i^*} > 0$，则 $\sum_j a_{ij} y_{j^*} = v$；若 $y_{i^*} > 0$，则 $\sum_i a_{ij} x_{i^*} = v$；若 $\sum_j a_{ij} y_{j^*} < v$，则 $x_{i^*} = 0$；若 $\sum_i a_{ij} x_{i^*} > v$，则 $y_{i^*} = 0$。

定理 7：设 $G_1 = \{S_1, S_2, \boldsymbol{A}_1\}$ 和 $G_2 = \{S_1, S_2, \boldsymbol{A}_2\}$，$\boldsymbol{A}_1 = (a_{ij})$，$\boldsymbol{A}_2 = (a_{ij} + L)$，$L$ 为任意常数，则有 $V_{G_2} = V_{G_1} + L$ 和 $T(G_2) = T(G_1)$。

定理 8：设 $G_1 = \{S_1, S_2, \boldsymbol{A}\}$ 和 $G_2 = \{S_1, S_2, \alpha\boldsymbol{A}\}$，其中，$\alpha > 0$ 为任一常数，则 $V_{G_2} = \alpha V_{G_1}$，$T(G_2) = T(G_1)$。

定理 9：设 $G = \{S_1, S_2, \boldsymbol{A}\}$ 为一矩阵对策，且 $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为斜对称矩阵（对称对策），则 $V_G = 0$，$T_1(G) = T_2(G)$。其中，$T_1(G)$ 和 $T_2(G)$ 分别为局中人Ⅰ和Ⅱ的最优策略集。

定义 5：设 $G = \{S_1, S_2, \boldsymbol{A}\}$，$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$，$S_2 = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$，$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$，如果对一切 $j = 1, \cdots, n$ 都有 $a_{i^0 j} \geqslant a_{k^0 j}$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i^0 行元素均不小于第 k^0 行的对应元素，则称局中人Ⅰ的纯策略 α_{i^0} 优超于 α_{k^0}；同样，若对一切 $i = 1, \cdots, m$，都有 $a_{ij^0} \leqslant a_{il^0}$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 l^0 列元素均不小于第 j^0 列的对应元素，则称局中人Ⅱ的纯策略 β_{j^0} 优超于 β_{l^0}。

定理 10：对 $G = \{S_1, S_2, \boldsymbol{A}\}$，$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$，$S_2 = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$，$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$，如果纯策略 α_1 被其余纯策略 $\alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中之一所优超，由 G 可得到一个新的矩阵策略，$G' = \{S_1, S_2, \boldsymbol{A}'\}$，$S'_1 = \{\alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$，$\boldsymbol{A}' = (a'_{ij})_{(m-1) \times n}$（$a_{ij} = a_{1j}$；$i = 2, \cdots, m$；$j = 1, \cdots, n$）。

于是有 $V_G' = V_G$。G' 中局中人Ⅱ的最优策略就是其在 G 中的最优策略。若 $(x_2^*, \cdots, x_m^*)^{\mathrm{T}}$ 是 G' 中局中人Ⅰ的最优策略，则 $x^* = (0, x_2^*, \cdots, x_m^*)^{\mathrm{T}}$ 便是其在 G 中的最优策略。

定理 10 中，若 α_1 不被纯策略 $\alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中之一所优超，而是被 $\alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的某个凸线性组合所优超，定理的结论仍然成立。

当局中人Ⅰ的某纯策略 α_i 被其他纯策略或其凸线性组合所优超时，可在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中划去第 G' 行，得到一个与原对策 G 等价但赢得矩阵阶数小的对策 G'，通过求解 G' 而得到 G 的解。对局中人Ⅱ来说，也可以在赢得矩阵 G' 中划去被其他列或其凸线性组合所优超的那些列。

【例 10-9】设赢得矩阵为 $\boldsymbol{A}$，求解这个矩阵对策。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&0&3&0\\5&0&2&5&9\\7&3&9&5&9\\4&6&8&7&5.5\\6&0&8&8&3\end{pmatrix}$$

【解】第 4 行优超于第 1 行，第 3 行优超于第 2 行，划去第 1 行和第 2 行，得到

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}7&3&9&5&9\\4&6&8&7&5.5\\6&0&8&8&3\end{pmatrix}$$

对于 $\boldsymbol{A}_1$，第 1 列优超于第 3 列，第 2 列优超于第 4 列，则删除第 3 和 4 列。

由于第 1、2 列的线性组合，即 1/3×(第 1 列)+2/3×(第 2 列)优超于第 5 列，故删除第 5 列，得到 $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}7&3\\4&6\\6&0\end{pmatrix}$。对 $\boldsymbol{A}_2$，第 1 行优超于第 3 行，故删除第 3 行，得到 $\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}7&3\\4&6\end{pmatrix}$。

应用定理 4，求解不等式组 $\begin{cases}7x_3+4x_4\geqslant v\\3x_3+6x_4\geqslant v\\x_3+x_4=1\\x_3,\ x_4\geqslant 0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}7y_1+3y_2\leqslant v\\4y_1+6y_2\leqslant v\\y_1+y_2=1\\y_1,\ y_2\geqslant 0\end{cases}$。

首先考虑满足 $\begin{cases}7x_3+4x_4=v\\3x_3+6x_4=v\\x_3+x_4=1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}7y_1+3y_2=v\\4y_1+6y_2=v\\y_1+y_2=1\end{cases}$ 的非负解。求得解为

$$x_3^*=\frac{1}{3},\ x_4^*=\frac{2}{3},\ y_1^*=\frac{1}{2},\ y_2^*=\frac{1}{2},\ v=5$$

10.2 矩阵对策的解法

矩阵对策问题的求解有很多种方法，本节将重点阐述这些方法。

10.2.1 公式法

对于赢得矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果有鞍点，则可求出最优纯策略；如果没有鞍点，则可证明各局中人最优混合策略中的 x_i^*，y_j^* 均大于零。针对赢得矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$，需要求下列等式组：

$$①\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}x_2=v\\a_{12}x_1+a_{22}x_2=v\\x_1+x_2=1\end{cases};\ ②\begin{cases}a_{11}y_1+a_{12}y_2=v\\a_{21}y_1+a_{22}y_2=v\\y_1+y_2=1\end{cases}$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 没有鞍点，可以证明上面的等式组一定有严格非负解 $x^*=(x_1^*,x_2^*)$ 和 $y^*=(y_1^*,y_2^*)$，

$x_1^*=\dfrac{a_{22}-a_{21}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}$，$x_2^*=\dfrac{a_{11}-a_{12}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}$，$y_1^*=\dfrac{a_{22}-a_{12}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}$，

$$y_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}, V_G = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}。$$

【例 10-10】求解矩阵对策 $G = \{S_1, S_2, \boldsymbol{A}\}$，其中，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$。

【解】由于 $\boldsymbol{A}$ 没有鞍点，其具有混合策略解，于是有

$$x_1^* = \frac{2-4}{(1+2)-(3+4)} = \frac{1}{2}, x_2^* = \frac{1-3}{(1+2)-(3+4)} = \frac{1}{2}, y_1^* = \frac{2-3}{(1+2)-(3+4)} = \frac{1}{4},$$

$$y_2^* = \frac{1-4}{(1+2)-(3+4)} = \frac{3}{4}, V_G = \frac{1\times 2 - 3\times 4}{(1+2)-(3+4)} = \frac{5}{2}。$$

最优解为 $x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$，$y^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)^{\mathrm{T}}$，对策值为 $V_G = \frac{5}{2}$。

10.2.2　图解法

图解法主要应用在赢得矩阵为 $2\times n$ 、$m\times 2$ 、$3\times n$ 或 $m\times 3$ 阶的对策上，不适用于 m 和 n 均大于 3 的对策。图解法的主要求解步骤如下。

步骤 1：假设局中人Ⅰ的混合策略为 $(x, 1-x)^{\mathrm{T}}$，$x\in[0, 1]$，在数轴上坐标为 O 和 $(1, 0)$ 的两点分别作两条垂线Ⅰ－Ⅰ和Ⅱ－Ⅱ，垂线上点的纵坐标值分别表示局中人Ⅰ采取纯策略 α_1 和 α_2 时，局中人Ⅱ选择各纯策略时的赢得值。当局中人Ⅰ选择每一策略 $(x, 1-x)^{\mathrm{T}}$ 时，他的最少可能的赢得为由局中人Ⅱ选择各种策略时所确定的直线。

步骤 2：连接三条直线，形成一个交集区域。

步骤 3：找出最高的交点，以该交点的直线建立方程并求解，即可得到最优混合策略。

【例 10-11】求解对策 $G = \{S_1, S_2, \boldsymbol{A}\}$，其中，$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$，$S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$。

【解】按照步骤 1 的思想，可以构建图 10-1。

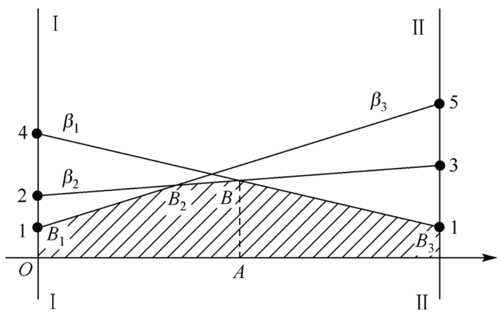


图 10-1　$2\times n$ 对策的图解图

当局中人Ⅰ选择每一策略 $(x, 1-x)^{\mathrm{T}}$ 时，最少可能的赢得为由局中人Ⅱ选择 β_1，β_2，β_3 时所分别确定的三条直线 $x + 4(1-x) = V$，$3x + 2(1-x) = V$ 和 $5x + (1-x) = V$。

在 x 处的纵坐标中的最小者，即折线 $B_1B_2BB_3$，按最小最大原则，应选择 $x = OA$，而 AB 即为对策值。为了求出点 x 和对策值 V_G，可联立过 B 点的 β_1 和 β_2 所确定的方程

$$\begin{cases} x + 4(1-x) = V_G \\ 3x + 2(1-x) = V_G \end{cases}$$

解得 $x=1/2$，$V_G=5/2$，所以 $x^*=(1/2,1/2)^{\mathrm{T}}$，局中人Ⅱ的最优混合策略只由 β_1 和 β_2 组成。

由
$$\begin{cases} y_1+3y_2=5/2 \\ 4y_1+2y_2=5/2 \\ y_1+y_2=1 \end{cases}$$

求得 $y_1^*=1/4$，$y_2^*=3/4$。所以局中人Ⅱ的最优混合策略为 $y^*=(1/4,3/4,0)^{\mathrm{T}}$。

10.2.3 线性方程组方法

假设最优策略中的 x_i^* 和 y_j^* 均不为零，即可将上述两个等式组的求解问题转化成求解下面两个方程组的问题

$$\begin{cases} \sum_i a_{ij}x_i=v \quad j=1,\cdots,n \\ \sum_i x_i=1 \end{cases} \text{和} \begin{cases} \sum_j a_{ij}y_j=v \quad i=1,\cdots,m \\ \sum_j y_j=1 \end{cases}$$

如果上述方程组存在非负解 x^* 和 y^*，便获得解 (x^*,y^*)。如果 x^* 和 y^* 中有负数，则可将方程组中的某些等式改成不等式，直至求出对策的解，但试算过程无固定规律可循。

【例 10-12】求解矩阵对策——“齐王赛马”。

【解】已知齐王的赢得矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，没有鞍点。齐王和田忌的最优策略为 $x^*=(x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*,x_5^*,x_6^*)^{\mathrm{T}}$ 和 $y^*=(y_1^*,y_2^*,y_3^*,y_4^*,y_5^*,y_6^*)^{\mathrm{T}}$。

假定 $x_i^*>0$ 和 $y_j^*>0$；$i=1,\cdots,6$；$j=1,\cdots,6$，求解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3-x_4+x_5+x_6=v \\ x_1+3x_2-x_3+x_4+x_5+x_6=v \\ x_1+x_2+3x_3+x_4-x_5+x_6=v \\ x_1+x_2+x_3+3x_4+x_5-x_6=v \\ x_1-x_2+x_3+x_4+3x_5+x_6=v \\ -x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+3x_6=v \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=1 \end{cases} \text{和} \begin{cases} 3y_1+y_2+y_3+y_4+y_5-y_6=v \\ y_1+3y_2+y_3+y_4-y_5+y_6=v \\ y_1-y_2+3y_3+y_4+y_5+y_6=v \\ -y_1+y_2+y_3+3y_4+y_5+y_6=v \\ y_1+y_2-y_3+y_4+3y_5+y_6=v \\ y_1+y_2+y_3-y_4+y_5+3y_6=v \\ y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6=1 \end{cases}$$

解得 $x^*=(1/6,1/6,1/6,1/6,1/6,1/6)^{\mathrm{T}}$ 和 $y^*=(1/6,1/6,1/6,1/6,1/6,1/6)^{\mathrm{T}}$。

10.2.4 线性规划方法

任一矩阵对策 $G=\{S_1,S_2,\boldsymbol{A}\}$ 的求解均等价于一对互为对偶的线性规划问题，对策问题的解 x^* 和 y^* 等价于下面两个不等式组的解：

$$①\begin{cases} \sum_i a_{ij}x_i\geqslant v \quad j=1,\cdots,n \\ \sum_i x_i=1 \\ x_i\geqslant 0 \qquad i=1,\cdots,m \end{cases}; \quad ②\begin{cases} \sum_j a_{ij}y_j\leqslant v \quad i=1,\cdots,m \\ \sum_j y_j=1 \\ y_j\geqslant 0 \qquad j=1,\cdots,n \end{cases}$$

对策值 $v=\max\limits_{x\in S_1^*}\min\limits_{y\in S_2^*}E(x,y)=\min\limits_{y\in S_2^*}\max\limits_{x\in S_1^*}E(x,y)$。

定理 11：设 $G=\{S_1,S_2,A\}$ 的值为 V_G，则 $V_G=\max\limits_{x\in S_1^*}\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}E(x,j)=\min\limits_{y\in S_2^*}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}E(i,y)$。

令 $x'_i=x_i/v\ (i=1,\cdots,m)$，①式可变成 $\begin{cases}\sum\limits_i a_{ij}x'_i\geqslant 1 & j=1,\cdots,n\\ \sum\limits_i x'_i=1/v & \\ x'_i\geqslant 0 & i=1,\cdots,m\end{cases}$。

令 $v=\max\limits_{x\in S_1^*}\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_i a_{ij}x_i$，①式可变成 $(P)\begin{cases}\min z=\sum\limits_i x'_i\\ \sum\limits_i a_{ij}x'_i\geqslant 1 & j=1,\cdots,n\\ x'_i\geqslant 0\end{cases}$。

同理，令 $y'_j=y_j/v\ (j=1,\cdots,n)$，②式可变成 $\begin{cases}\sum\limits_j a_{ij}y'_j\leqslant 1 & i=1,\cdots,m\\ \sum\limits_j y'_j=1/v & \\ y'_j\geqslant 0 & j=1,\cdots,n\end{cases}$。

令 $v=\min\limits_{y\in S_2^*}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\sum\limits_j a_{ij}y_j$，②式可变成 $(D)\begin{cases}\max w=\sum\limits_j y'_j\\ \sum\limits_j a_{ij}y'_j\leqslant 1 & i=1,\cdots,m\\ y'_j\geqslant 0 & j=1,\cdots,n\end{cases}$。

当求得问题 (P) 和 (D) 的解后，再利用变换即可求出原对策问题的解及对策的值。

【例 10-13】某地有两家商店，商店 A 和 B 均有三个广告策略，双方采取不同的广告策略时，A 商店的赢得矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$，求出此对策。

【解】该问题可化成以下两个互为对偶的线性规划问题：

$$\min(x_1+x_2+x_3)\qquad\qquad \max(y_1+y_2+y_3)$$

$$①\begin{cases}3x_1+2x_3\geqslant 1\\ 2x_2\geqslant 1\\ 2x_1-x_2+4x_3\geqslant 1\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases};\quad ②\begin{cases}3y_1+2y_3\leqslant 1\\ 2y_2\leqslant 1\\ 2y_1-y_2+4y_3\leqslant 1\\ y_1,y_2,y_3\geqslant 0\end{cases}$$

利用单纯形方法求解问题，迭代过程见表 10-2。

表 10-2　单 纯 形 表

c_j			1	1	1	0	0	0	w
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{b}$	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2	u_3	
0	u_1	1	[3]	0	2	1	0	0	
0	u_2	1	0	2	0	0	1	0	
0	u_3	1	2	−1	4	0	0	1	
c_j-z_j			−1	−1	1	0	0	0	0

（续表）

c_j			1	1	1	0	0	0	w
C_B	x_B	b	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2	u_3	
1	y_1	1/3	1	0	2/3	1/3	0	0	
0	u_2	1	0	[2]	0	0	1	0	
0	u_3	1/3	0	-1	8/3	2/3	0	1	
c_j-z_j			0	-1	1/3	1/3	0	0	1/3
1	y_1	1/3	1	0	2/3	1/3	0	0	
1	y_2	1/2	0	1	0	0	1/2	0	
0	u_3	5/6	0	0	[8/3]	-2/3	1/2	1	
c_j-z_j			0	0	-1/3	1/3	1/2	0	5/6
1	y_1	1/8	1	0	0	1/2	-1/8	-1/4	
1	y_2	1/2	0	1	0	0	1/2	0	
1	y_3	5/16	0	0	1	-1/4	3/16	3/8	
c_j-z_j			0	0	0	1/4	9/16	1/8	15/16

于是，$x^* = V_G\left(\frac{1}{4},\frac{9}{16},\frac{1}{8}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{4}{15},\frac{9}{15},\frac{2}{15}\right)^{\mathrm{T}}$，$y^* = V_G\left(\frac{1}{8},\frac{1}{2},\frac{5}{16}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{2}{15},\frac{8}{15},\frac{5}{15}\right)^{\mathrm{T}}$，$V_G = \frac{16}{15}$。

10.3 其他对策

矩阵对策仅仅是一种常见的对策形式，也是一种最简单的对策。现实中的对策可以划分为合作和非合作对策，静态和动态对策，等等。

10.3.1 二人无限零和对策

用 $G=\{S_1, S_2; H\}$ 表示一个二人无限零和对策，S_1 和 S_2 中至少有一个是无限集合，H 为局中人Ⅰ的赢得函数。记 $v_1 = \max\limits_{\alpha_i\in S_1}\min\limits_{\beta_j\in S_2} H(\alpha_i, \beta_j)$，$v_2 = \min\limits_{\beta_j\in S_2}\max\limits_{\alpha_i\in S_1} H(\alpha_i, \beta_j)$，则 v_1 为局中人Ⅰ的至少赢得，v_2 为局中人Ⅱ的至多所失。显然有 $v_1 \leqslant v_2$，当 $v_1 = v_2$ 时，有如下定义。

定义 6：设 $G=\{S_1, S_2; H\}$ 为二人无限零和对策。若存在 $\alpha_{i^*}\in S_1$，$\beta_{j^*}\in S_2$，使得

$$\max_{\alpha_i\in S_1}\min_{\beta_j\in S_2} H(\alpha_i, \beta_j) = \min_{\beta_j\in S_2}\max_{\alpha_i\in S_1} H(\alpha_i, \beta_j) = H(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*}) \tag{10-2}$$

记其值为 V_G，则称 V_G 为对策 G 的值，使(10-2)式成立的 $(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$ 为 G 在纯策略意义下的解，α_{i^*}，β_{j^*} 分别称为局中人Ⅰ和Ⅱ的最优纯策略。

定理 12：$(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$ 为 $G=\{S_1, S_2; H\}$ 在纯策略意义下解的充要条件是：对任意 $\alpha_i\in S_1$，$\beta_j\in S_2$，有 $H(\alpha_i, \beta_{j^*}) \leqslant H(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*}) \leqslant H(\alpha_{i^*}, \beta_j)$。

定义 7：如果 $\sup\limits_X \inf\limits_Y H(X, Y) = \inf\limits_Y \sup\limits_X H(X, Y) = V_G$，则称 V_G 为对策 G 的值，使其成立的 (X^*, Y^*) 为对策 G 的解，X^* 和 Y^* 分别为局中人Ⅰ和Ⅱ的最优策略。

定理 13：(X^*, Y^*) 为 $G=\{S_1, S_2; H\}$ 的解的充要条件是：对任意 $X\in\overline{X}$，$Y\in\overline{Y}$，有

$$H(X, Y^*) \leqslant H(X^*, Y^*) \leqslant H(X^*, Y)$$

当 $S_1 = S_2 = [0, 1]$，且 $H(x, y)$ 为连续函数时，称为连续对策，局中人Ⅰ和Ⅱ的混合策略即为 $[0, 1]$ 区间上的分布函数。记 $[0, 1]$ 区间上的分布函数的集合为 D，则有

$$H(X, Y) = \int_0^1 \int_0^1 H(x, y) \mathrm{d}F_X(x) \mathrm{d}F_Y(y)$$

对连续对策，记 $v_1 = \max\limits_{X \in D} \min\limits_{Y \in D} H(X, Y)$，$v_2 = \min\limits_{Y \in D} \max\limits_{X \in D} H(X, Y)$。

定理 14：对任何连续对策，一定有 $v_1 = v_2$。

10.3.2　多人非合作对策

非合作对策是指局中人之间互不合作，选择策略时不允许事先有任何交换信息的行为。

非合作对策模型 $G = \{I, \{S_i\}, \{H_i\}\}$ 描述为局中人集合 $I = \{1, 2, \cdots, n\}$；局中人策略集 $S_1, S_2, \cdots, S_n$；局势 $s = (s_1, \cdots, s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$；局中人 i 的赢得函数为 $H_i(s)$，$\sum\limits_{i=1}^{n} H_i(s) \neq 0$。

令 $s, s_i^0 = (s_1, \cdots, s_{i-1}, s_i^0, s_{i+1}, \cdots, s_n)$，局中人 i 将自己的策略由 s_i 换成 s_i^0，其他局中人的策略不变。如果存在一个局势 s，对任意 $s_i^0 \in s_i$，有 $H_i(s) \geqslant H_i(s, s_i^0)$，则称局势 s 对局中人 i 有利。

定义 8：如果局势 s 对所有局中人都有利，对任意 $i \in I$, $s_i^0 \in S_i$，有 $H_i(s) \geqslant H_i(s, s_i^0)$，则称 s 为非合作对策 G 的一个平衡局势（或平衡点）。

令 S_i^* 为定义在 S_i 上的混合策略集（即 S_i 上所有概率分布的集合），x^i 表示局中人 i 的一个混合策略，$x = (x^1, \cdots, x^n)$ 为一个混合局势。$x, z^i = (x^1, \cdots, x^{i-1}, z^i, x^{i+1}, \cdots, x^n)$ 表示局中人 i 在局势 x 下，将自己的策略由 x^i 置换成 z^i 而得到的一个新的混合局势。

定义 9：令 $E_i(x)$ 为局中人 i 在混合局势 x 下的赢得期望值，对任意 $i \in I$, $z^i \in S_i^*$，有 $E_i(x, z^i) \leqslant E_i(x)$，则称 x 为非合作 n 人对策 G 的一个平衡局势（或平衡点）。

定理 15（纳什定理）：非合作 n 人对策在混合策略意义下的平衡局势一定存在。

对二人有限非零和对策，一定存在 $x^* \in S_1^*$，$y^* \in S_2^*$，使得 $x^{*\mathrm{T}}Ay^* \geqslant x^{\mathrm{T}}Ay^*$，$x \in S_1^*$ 和 $x^{*\mathrm{T}}By^* \geqslant x^{*\mathrm{T}}By^*$，$y \in S_2^*$。

设双矩阵对策中两局中人的赢得矩阵分别为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$。记局中人Ⅰ和Ⅱ的混合策略为 $(x, 1-x)$ 和 $(y, 1-y)$，于是局势 (x, y) 的对策平衡点充要条件是

$E_1(x, y) \geqslant E_1(1, y)$，$E_1(x, y) \geqslant E_1(0, y)$，$E_2(x, y) \geqslant E_2(x, 1)$，$E_2(x, y) \geqslant E_2(x, 0)$

于是 $Q(1-x)y - q(1-x) \leqslant 0$ 和 $Qxy - qx \geqslant 0$，$Q = a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}$，$q = a_{22} - a_{12}$。其中，当 $Q = 0$, $q = 0$ 时，$0 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant y \leqslant 1$；当 $Q = 0$, $q > 0$ 时，$x = 0$，$0 \leqslant y \leqslant 1$；当 $Q = 0$, $q < 0$ 时，$x = 1$，$0 \leqslant y \leqslant 1$。当 $Q \neq 0$ 时，记 $q/Q = a$，有 $x = 0$，$y \leqslant a$；$0 < x < 1$，$y = a$；$x = 1$，$y \geqslant a$。

$Rx(1-y) - r(1-y) \leqslant 0$ 和 $Rxy - ry \geqslant 0$，$R = b_{11} + b_{22} - b_{21} - b_{12}$，$r = b_{22} - b_{21}$。其中，当 $R = 0$, $r = 0$ 时，$0 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant y \leqslant 1$；当 $R = 0$, $r > 0$ 时，$0 \leqslant x \leqslant 1$，$y = 0$；当 $R = 0$, $r < 0$ 时，$0 \leqslant x \leqslant 1$，$y = 1$。当 $R \neq 0$ 时，记 $r/R = \beta$，有 $x \leqslant \beta$，$y = 0$；$x = \beta$，$0 < y < 1$；$x \geqslant \beta$，$y = 1$。

本章要点

对策论中的基本要素也即基本概念，包括局中人、策略集合赢得函数，这些是对策论的基础知识。

对策论的基本定理和性质。

矩阵对策的解法，包括公式法、图解法、方程组法以及线性规划方法。

关键公式

- 矩阵对策 $G=\{S_1, S_2, A\}$ 在纯策略意义下有解的充要条件是：存在纯局势 $(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$，使得对一切 $i=1, \cdots, m$；$j=1, \cdots, n$ 均有 $a_{ij^*} \leqslant a_{i^*j^*} \leqslant a_{i^*j}$。
- 当局中人Ⅰ选取纯策略 α_i 时，赢得函数为 $E(i, y)=\sum_j a_{ij}y_j$。当局中人Ⅱ选取纯策略 β_j 时，赢得函数为 $E(x, j)=\sum_i a_{ij}x_i$，于是

$$E(x, y)=\sum_i \sum_j a_{ij}x_iy_j=\sum_i\left(\sum_j a_{ij}y_j\right)x_i=\sum_i E(i, y)x_i=\sum_j E(x, j)y_j$$

练习题

1. 利用优超原则求解下列矩阵对策：

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 4\\ -1 & 4 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$；(2) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & 8\\ 1 & 0 & 2 & 6\\ 2 & 0 & 3 & 9\\ -1 & -2 & 0 & 3\end{pmatrix}$；(3) $A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 6 & 9\\ 0 & 4 & 1 & 5\\ -4 & 3 & -5 & 2\\ 0 & -2 & 4 & 10\end{pmatrix}$。

2. 利用图解法求解下列矩阵对策：

(1) $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & 3\\ 3 & 2\\ -2 & 6\end{pmatrix}$；(2) $A=\begin{pmatrix}5 & 7 & -6\\ -6 & 0 & 4\\ 7 & 8 & 5\end{pmatrix}$；(3) $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3 & -1\\ -4 & 0 & -2 & -2\end{pmatrix}$。

3. 用线性规划方法求解下列矩阵：

(1) $A=\begin{pmatrix}8 & 2 & 4\\ 2 & 6 & 6\\ 6 & 4 & 4\end{pmatrix}$；(2) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$；(3) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -5 & 3\\ -1 & 4 & 7 & 2\\ 5 & -1 & 1 & 9\end{pmatrix}$。

4. 一个称为“石头－剪刀－布”的游戏规则如下：两个局中人同时选择三个策略(石头、剪刀、布)中的一个。如果两人同时选择同样的策略，则双方都不得分；如果剪刀和布相遇，则选择剪刀的局中人得一分；如果剪刀和石头相遇，则选择石头的局中人得一分；如果布和石头相遇，则选择布的人得一分。把这个游戏表示成两个零和对策，并分别求局中人的最优策略。

第 11 章　排　队　论

本章概要

学习目标　学完本章后，你将能够：

1. 了解排队论的主要应用以及排队系统的主要指标。
2. 识别单服务台或者多服务台排队问题并进行计算。
3. 将指标计算结果运用到实践中。

排队问题的例子

北方飞机制造公司的制造副总裁吉姆·威尔士被激怒。这个早晨，他走过公司最重要的制造厂，情绪非常差。他可以将脾气发泄在这个厂的制造经理杰里·卡斯塔斯身上，杰里刚刚被吉姆叫进办公室。

吉姆：杰里，我刚刚从厂子那里回来，我非常失望。

杰里：出了什么问题，吉姆？

吉姆：你知道我是多么地强调要削减我们的在制品库存。

杰里：是的，我们一直在努力。

吉姆：还不够！

杰里：你知道我在走过冲压机时看到了什么吗？

吉姆：不知道。

杰里：有 5 张金属薄板等待加工成机翼组件，然后旁边的质检站放着 13 套机翼组件，一个质检员正在检查 1 套，其他 12 套却躺在那里。你知道每套机翼组件占用了我们几十万美元的资金。在冲压机和质检站间，有几百万美元的贵重金属躺在那儿。我不允许这样！

委屈的杰里努力回答：“是的，吉姆，我已经意识到了质检站是一个瓶颈。它通常不像你早上看到的那样糟，但它的确是一个瓶颈，早上你看到的的确是较差的情况。”

“希望如此”，吉姆反驳道，“但是你应当防止这种情况的发生，哪怕是偶然发生，你准备怎么做？”

杰里现在对他的提问有话可说了。他说：“实际上，我已经在处理这个问题。我现在有一些方案，我要求我的工作人员的管理科学专家分析这些建议，然后提出建议方案。”

“很好”，吉姆回答道，“很高兴这个问题在你的掌握之中。授予你最高的优先权，尽可能快地向我报告。”

“我会这样做的。”杰里保证。

这里是杰里和他的管理科学专家们所遇到的问题。10 台一样的冲压机每台都用于在一张经过特殊处理的金属薄板上冲压出机翼组件。金属薄板以每小时 7 张的速度随机到达，冲压机冲压出机翼组件的时间服从均值为 1 h 的指数分布。完成后，机翼组件以相同的到达率随机到达质检站（每小时 7 套）。一个质检员全职检查这些机翼组件，保证它们符合标准，每次检查花费 7.5 min。因此，每小时可以检查 8 套机翼组件。除了在冲压机那里已有的在制品库存外，这个检查率导致了质检站大量的在制品库存（也就是说，等待完成检查的机翼组件的平均数量相当大）。

这种在制品库存的成本估计是每张在冲压机那里的金属薄板或每套在质检站的机翼组件每小时 8 美元。杰里提出了两个方案以降低在制品库存的平均水平。

方案 1：略微降低冲压机的压力（这会导致冲压一套机翼组件的平均时间增加到 1.2 h），使得质检员可以更好地跟上它们的产出速度。这还会将每台冲压机的成本（运作成本加折旧成本）从每小时 7 美元降低到 6.5 美元。相反，增大最大压力会使成本上升到每小时 7.5 美元，冲压一套机翼组件的平均时间减少到 0.8 h。

方案 2：雇用一个年纪较轻的质检员做这项工作。他的工作速度比较快（尽管由于缺少经验，检查时间有一些波动），因此他能够更好地跟上冲压机的产出速度。他的检查时间服

从均值为 7.2 min,服从指数分布。这个质检员的工作等级要求每小时的收入为 19 美元(包括奖金)。现在地质检员由于工作等级较低，每小时 17 美元。

你是杰里的工作人员中的管理科学专家，被要求对这个问题进行分析。他要求你用最先进的管理科学技术分析每个方案能够降低多少在制品库存，然后提出你的建议。

11.1　排队论概述

排队是日常现象，如顾客购买商品、病人到医院看病、故障机器的停机待修、水库水量的存储调节等。本节将介绍一些排队论的基本概念，从而为构建排队模型提供支持。

11.1.1　基本概念

排队论是研究排队现象的理论和应用学科，是专门研究由于随机因素的影响而产生拥挤现象的科学。20 世纪初，丹麦电气工程师爱尔朗把概率论应用于电话通话问题，从而开创了这门科学。20 世纪 30 年代中期，费勒引入了生灭过程，排队论才被数学界认为是一门重要的学科。20 世纪 40 年代，排队论成为运筹学的重要组成部分。20 世纪 50 年代初，肯德尔采用马尔科夫链方法研究了排队论。20 世纪 60 年代，有关排队论的很多问题难以获得精确解，于是很多学者开始了近似方法研究。

目前，排队论广泛应用在通信系统、交通系统、计算机存储系统和生产管理系统等诸多领域，如公共汽车排队、医院看病排队、买火车票排队等，见表 11-1。

表 11-1　排队系统的例子

序号	到达的顾客	要求的服务内容	服务机构
1	不能运转的机器	修理	修理技工
2	修理技工	领取修配零件	发放修配零件的管理员
3	病人	诊断或做手术	医生(或包括手术台)
4	电话呼唤	通话	交换台
5	文件稿	打字	打字员
6	提货单	提取存货	仓库管理员
7	驶入港口的货船	装(卸)货	装(卸)货码头(泊位)
8	上游河水进入水库	放水，调整水位	水闸管理员

在排队系统中，各个顾客由顾客源(总体)出发，到达服务机构(服务台、服务员)前排队等候接受服务，服务完成后就离开。其中，排队结构指队列的数目和排列方式，排队规则和服务规则是说明顾客在排队系统中按怎样的规则和次序接受服务的。

排队系统通常具有如下特征。

(1)顾客：请求服务的人或者物。

(2)服务员或者服务台：为顾客服务的人或者物。

(3)顾客到达服务系统的时刻是随机的，为每位顾客提供服务的时间也是随机的，因此整个排队系统的状态也是随机的。

通常，排队系统都由以下三个基本组成部分。

1. 输入过程

输入过程指顾客按照什么样的规律到达服务系统。

(1)顾客的总体(称为顾客源)的组成可能是有限的，也可能是无限的。河水流入水库可以认为总体是无限的，工厂内停机待修的机器显然是有限的总体。

(2)顾客到来的方式可能是一个一个的，也可能是成批的。到餐厅就餐就有单个到来的顾客和受邀请来参加宴会的成批顾客。

(3)顾客相继到达的间隔时间可以是确定型或随机型。如在自动装配线上装配的各部件必须按确定的时间间隔到达装配点，到商店购物的顾客、到医院诊病的病人、通过路口的车辆等都是随机型的。

(4)顾客的到达可以是相互独立的，即以前到达的顾客对以后顾客的到来没有影响，否则就是有关联的。工厂内的机器在一个短的时间区间内出现停机的概率就受已经待修或被修理的机器数目的影响。

(5)输入过程可以是平稳的，或称对时间是齐次的，是指描述相继到达的间隔时间分布和所含参数(如期望值、方差)都是与时间无关的，否则称为非平稳的。非平稳情形的数学处理是很困难的。

2. 排队规则

(1)损失制。指顾客到达排队系统时，所有的服务台都被先到的顾客占用，于是就离开服务系统。

(2)等待制。顾客到达服务系统时，所有的服务台都不空，顾客加入排队行列等待服务。等待制中，为顾客进行服务的次序可以采用下列各种规则。

①先到先服务：按到达次序接受服务，这是最通常的情形。

②后到先服务：如乘电梯的顾客常是后入先出的，仓库中存放的厚钢板也是如此。

③随机服务：指服务员从等待的顾客中随机地选取其一进行服务，而不管到达的先后，如电话交换台接通呼唤的电话就是如此。

④有优先权的服务，如医院对于病情严重的患者将给予优先治疗。

(3)混合制。是等待制和损失制相结合的服务规则，允许排队但又不允许队列无限长，可以分为以下几种。

①队长有限：当排队等待服务的顾客人数超过规定的数量时，顾客将自动离去，即系统的等待空间是有限的。

②等待时间有限：顾客在系统中等待时间不超过某一给定的长度，当超过时即离去。

③逗留时间有限：即等待时间和服务时间之和有限。

3. 服务机构

服务机构可以没有服务员，也可以有一个或多个服务员(服务台、通道、窗口等)。从构成形式上看，服务台有单队-服务台，多队-多服务台、单队-多服务台并联，单队-多服务台串联，以及多队-多服务台并串联混合等,如图 11-1 ~ 图 11-5 所示。

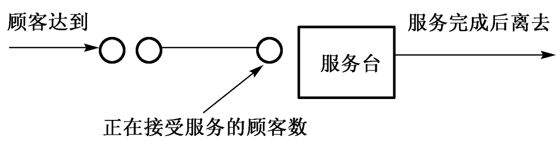


图 11-1　单队－服务台排队系统

服务方式可以对单独顾客进行，也可以对成批顾客进行。

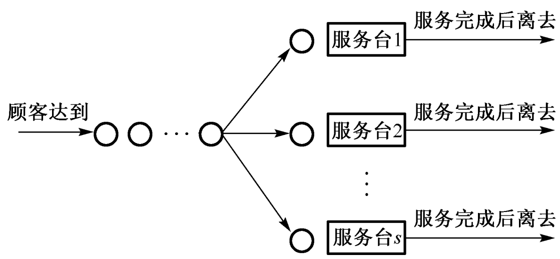


图 11-2　单队－多服务台并联排队系统

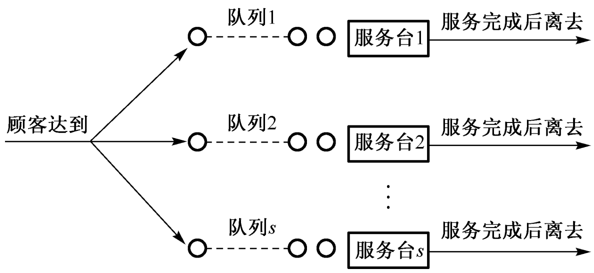


图 11-3　多队－多服务台并联排队系统

图 11-4　单队－多服务台串联排队系统

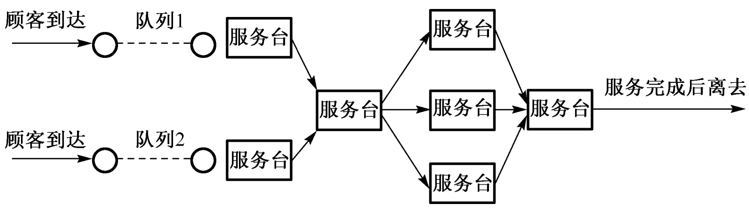


图 11-5　多队－多服务台混联排队系统

在大多数情况下，对每个顾客的服务时间是一个随机变量。

通常，基本排队过程如图 11-6 所示。

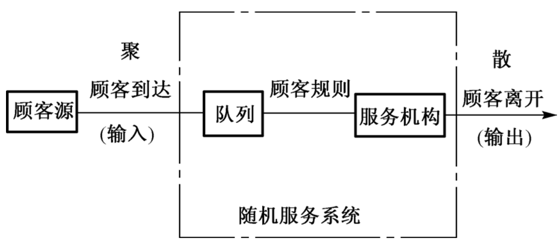


图 11-6　随机服务系统

D. G. Kendall 针对服务系统的特征，在 1953 年提出了排队模型分类方法，主要参数为顾客相继到达间隔时间的分布 X 、服务时间的分布 Y 、服务台的个数 Z 。

相继到达间隔时间和服务时间的各种分布的符号是：M 表示负指数分布（M 是 markov 的字头，负指数分布具有无记忆性，即 Markov 性）；D 表示定长输入或确定性输入（deterministic）；E_k 表示 k 阶爱尔朗（erlang）分布；GL 表示一般相互独立（general independent）的时间间隔的分布；G 表示一般（general）服务时间的分布。

通常，一个排队系统可以表示为 $X/Y/Z/A/B/C$。

X 、Y 和 Z 的含义如前所述。在 Z 中，1 表示单服务台，s 表示多个服务台。

A 表示系统容量限制，默认为无穷大，如果系统中有 k 个位子，则 $0 < k < \infty$ 。如果 $k = 0$ ，表明系统不允许等待，即损失制；$k = \infty$ 是等待制系统。

B 表示顾客源数目，分有限和无限两种。

C 表示服务规则，如先到先服务（FCFS）、后到后服务（LCFS）等。

4. 排队系统的优化

排队系统的最优化问题分为系统设计的最优化和系统控制最优化。前者称为静态问题，目的在于使设备达到最大效益；后者称为动态问题，是指一个给定的系统，如何运营可使某个目标函数得到最优。动态问题分析较为困难，所以一般只讨论静态最优。

服务水平的提高会降低顾客的等待费用，却常常增加了服务机构的成本，最优化的目标之一是使两种费用之和为最小，并决定达到这一目标的最优服务水平。另一个常用的目标函数是使纯收入或利润（服务收入与服务成本之差）为最大。其中，各种费用在静态情形下，都是按单位时间来考虑的，是可以确切计算或估计的。

11.1.2 主要指标

研究排队系统运行的效率，估计服务质量，确定系统参数的最优值，以决定系统结构是否合理，研究设计改进措施等，都需要用基本数量指标描述。

1. 队长

指系统中的顾客数，期望值是 L_s（平均队长），即排队等待的顾客数和正在接受服务的顾客数之和。排队长（队列长）指在系统中排队等待服务的顾客数，期望值记作 L_q（平均等待队长）。L_s 或 L_q 越大，说明服务率越低。

2. 逗留时间

指一个顾客在系统中的停留时间，期望值是 W_s（平均逗留时间）。等待时间指一个顾客在系统中的停留时间，期望值是 W_s（平均等待时间）。

3. 忙期

指从顾客到达空闲服务机构直到服务机构再次空闲这段时间长度，即服务机构连续繁忙的时间长度，它关系到服务员的工作强度。忙期和一个忙期中平均完成服务顾客数都是衡量服务机构效率的指标。

4. 其他指标

s 表示系统中并联服务台的数目；λ 表示平均到达率；$1/\lambda$ 表示平均到达间隔；μ 表示平均服务率；$1/\mu$ 表示平均服务时间；N 表示稳态系统任意时刻的状态，即系统中的顾客

数；U 表示任一顾客在稳态系统中的逗留时间；Q 表示任一顾客在稳态系统中的等待时间；$P_n = P(N = n)$ 表示稳态系统任意时刻状态为 n 的概率，其中 P_0 表示稳态系统所有服务台都空闲的概率；ρ 表示服务强度，即每个服务台单位时间内的平均服务时间，一般 $\rho = \lambda/(\mu s)$，它是衡量排队系统繁忙的重要指标。

一个排队系统的最主要特征参数是顾客的到达间隔时间分布与服务时间分布，通常需要根据现存系统原始资料统计出它们的经验分布，然后与理论分布拟合。

经验分布是对排队系统某些时间参数的经验数据进行统计分析，假设其统计样本的总体分布，选择合适的检验方法进行检验。分布的拟合检验一般采用 χ^2 检验。如果样本量充分大，如大于 50，则当假设 H_0 为真时，统计量总是近似地服从自由度为 $k - r - 1$ 的 χ^2 分布。其中，k 为分组数；r 为检验分布中被估计的参数个数。下面重点介绍泊松流。

5. 泊松分布

设 $N(t)$ 表示在时间 $[0, t)$ 内到达的顾客数（ $t > 0$ ）。令 $p_n(t_1, t_2)$ 表示在时间区间 $[t_1, t_2)(t_2 > t_1)$ 内有（ $n > 0$ ）个顾客到达的概率，即

$$p_n(t_1, t_2) = p\{N(t_1) - N(t_2) = n\}, \ t_2 > t_1, \ n \geqslant 0$$

当 $p_n(t_1, t_2)$ 符合下列三个条件时，顾客的到达形成泊松流：

(1) 在不相重叠的时间区间内顾客到达数是相互独立的，即无后效应性。

(2) 对充分小的 Δt，在时间区间 $[t, t + \Delta t]$ 内有 1 个顾客到达的概率与 t 无关，而与区间长 Δt 成正比，即 $P(t, t + \Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$，当 $\Delta t \to 0$ 时，是关于 Δt 的高阶无穷小。$\lambda > 0$ 是常数，它表示单位时间内有一个顾客到达的概率，称为概率强度。

(3) 对于充分小的 Δt，在时间区间 $[t, t + \Delta t]$ 内有 2 个或 2 个以上顾客到达的概率极小，以至于可以忽略，即 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} p_n(t, t + \Delta t) = o(\Delta t)$

由条件(2)，时间由 0 算起，并简记 $p_n(0, t) = p_n(t)$。

由条件(2)和(3)，在 $[t, t + \Delta t)$ 区间内没有顾客到达的概率为 $p_0(t, t + \Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$。

在区间 $(0, t + \Delta t)$，求有 n 个顾客到达的概率，可分成两个互不重叠的区间 $[0, t]$ 和 $[t, t + \Delta t]$，分成三种情况，见表 11-2。

表 11-2　三种情况表

情况 \ 区间	$[0, t)$		$[t, t+\Delta t)$		$[0, t+\Delta t)$	
	个数	概率	个数	概率	个数	概率
A	n	$P_n(t)$	0	$1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$	n	$P_n(t)[1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)]$
B	$n-1$	$P_{n-1}(t)$	1	$\lambda\Delta t$	n	$P_{n-1}(t)\lambda\Delta t$
C	$n-2$	$P_{n-2}(t)$	2	$o(\Delta t)$	n	$o(\Delta t)$
	⋮	⋮	⋮		⋮	
	0	$P_0(t)$	n		n	

因此，在 $[0, t + \Delta t]$ 内到达 n 个顾客的概率为

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)(1 - \lambda \Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

于是

$$\frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，有 $\frac{\mathrm{d}P_n(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$，$P_n(0) = 0$，$n > 1$。如果 $n = 0$，有 $\frac{\mathrm{d}P_0(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda P_0(t)$，$P_0(0) = 0$。于是 $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}(n = 0, 1, 2, \cdots, t > 0)$。

如果某个随机变量服从上述泊松分布，其期望值和方差均为 λt。

【例 11-1】在某天上午 11∶30 ~ 11∶47，每隔 20 s 统计一次来到长途车站的乘客数，共有 230 个记录，得到乘客数目为 0、1、2、3、4 的频数分别为 100、81、34、9、6，请用泊松过程描述乘客到达车站的过程，并写出概率分布。

【解】20 s 到达顾客的平均数为

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{230}(0 \times 100 + 1 \times 81 + 2 \times 34 + 3 \times 9 + 4 \times 67) \approx 0.87$$

每分钟到达的顾客数为 $\lambda = 3 \times 0.87 = 2.61$，因此概率分布为

$$P[N(t) = k] = \frac{(2.61t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-2.61t}$$

6. 负指数分布

假定随机变量 T 服从负指数分布，则其概率密度为 $f_T(t) = \begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0\end{cases}$。其数学期望值为 $1/\lambda$，方差为 $1/\lambda^2$。

当输入过程为泊松流时，两个顾客相继到达的时间间隔为 T 的概率分布，首先考虑泊松分布在 $[0, t]$ 时间内到达 n 个顾客的概率为 $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}(n = 0, 1, 2, \cdots), t > 0$。由于 $T > t$ 表示在 $[0, t]$ 内没有顾客到达，所以 $P_0(t) = P(T > t)$。于是，在时间间隔 T 的分布函数为 $F(T) = P(T \leqslant t) = 1 - P(T > t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$，$t > 0$，其概率密度函数正好为负指数分布的概率密度函数，所以如果顾客到达是泊松流，则到达间隔时间必定为负指数分布。

【例 11-2】在某个交叉路口观察了 25 辆向北行驶的汽车到达路口的时刻，记录结果见表 11-3，请运用泊松过程来描述其到达过程。

表 11-3　汽车到达路口的时刻

间隔/s	1	8	12	15	17	19	27	43	58	64	70	72
73	91	92	101	102	103	105	109	122	123	124	135	137

【解】由于相继到达的时间间隔相互独立，服从负指数分布，因此平均时间间隔为 $1/\lambda = 137/25\ \mathrm{s} = 5.48\ \mathrm{s}$，于是 $\lambda = 0.1825\ \mathrm{s}$

7. 爱尔朗分布

设 $v_1, \cdots, v_k$ 是 k 个相互独立的随机变量，服从相同参数 $k\mu$ 的负指数分布，令 $T = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$，则 T 的概率密度为 $b_k(t) = \frac{\mu k\,(\mu k t)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\mu k t}$，$t > 0$，则 T 服从 k 阶爱尔朗分布。期望值为 $E(T) = 1/\mu$，方差为 $\mathrm{Var}(T) = 1/(k\mu^2)$。

例如，串联的 k 个服务台，每台服务时间相互独立，服从相同的负数指数分布（参数 $k\mu$），那么一个顾客走完这 k 个服务台总共需要的服务时间就服从上述条件的 k 阶爱尔朗分布。

爱尔朗分布比指数分布有更大的适应性。当 $k = 1$ 时，爱尔朗分布化为负指数分布；当 k 增大时，爱尔朗分布的图形逐渐变为对称的；当 $k \geqslant 30$ 时爱尔朗分布近似于正态分布；当

$k \to \infty$ 时, $\mathrm{Var}(T) \to 0$ ，爱尔朗分布化为确定型分布，所以一般 k 阶爱尔朗分布可以看成完全随机和完全确定的中间型，对现实世界提供更为广泛的适应性。

11.2　单服务台负指数分布排队模型

单服务台负指数分布是最常见的排队模型。本节将结合此类排队模型，深入研究其排队模型和主要指标。

11.2.1　*M/M/*1 模型

该类模型主要指：输入过程方面，顾客源是无限的，顾客单个到来且相互独立，一定时间的到达数服从泊松分布，到达过程是平稳的；排队规则方面，单队且对队长没有限制，先到先服务；服务机构方面，单服务台，各个顾客的服务时间是相互独立的，服从相同的负指数分布；到达间隔时间和服务时间是相互独立的。

由于到达服从参数为 λ 的泊松分布，服务时间服从参数为 μ 的负指数分布。所以在区间 $[t, t+\Delta t)$ 内，1 个顾客到达的概率为 $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ ，所以没有顾客到达的概率可以表示为 $1-\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ ；1 个顾客在服务结束(离去)的概率为 $\mu\Delta t + o(\Delta t)$ ，没有离去的概率表示为 $1-\mu\Delta t + o(\Delta t)$ ；多于 1 个顾客到达或者离去的概率为 $o(\Delta t)$ 。

在 $t+\Delta t$ 时刻，系统中有 n 个顾客的情形见表 11-4(到达或离去是 2 个以上的没列入)。

表 11 –4　系统有 n 个顾客的情形表

情况	t 时刻顾客数	$(t, t+\Delta t)$ 到达	$(t, t+\Delta t)$ 离去	概率
A	n	没有	没有	$P_n(t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)$
B	$n+1$	没有	发生	$P_{n+1}(t)(1-\lambda\Delta t)\mu\Delta t$
C	$n-1$	发生	没有	$P_{n-1}(t)\lambda\Delta t(1-\mu\Delta t)$
D	n	发生	发生	$P_n(t)\lambda\Delta t\mu\Delta t$

上述四项概率之和为

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)(1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t) + P_{n+1}(t)\mu\Delta t + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

于是
$$\frac{\mathrm{d}P_n(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) - (\lambda+\mu)P_n(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

当 $n = 0$ 时，概率为 A 和 B 的概率之和，即

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1-\lambda\Delta t) + P_1(t)(1-\lambda\Delta t)\mu\Delta t$$

$$\frac{\mathrm{d}P_0(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

稳态状况下，$P_n(t)$ 与 t 无关，可以写成 P_n 。则 P_n 的差分方程为

$$\begin{cases} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \\ \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} - (\lambda+\mu)P_n = 0 \end{cases}$$

它表明了各状态间的转移关系，可用图 11-7 表示。

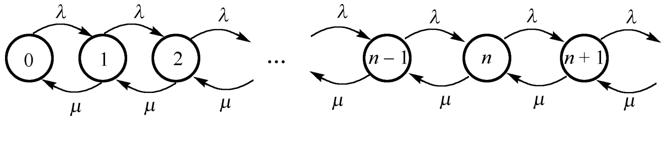


图 11-7　状态转移图

解上述差分方程，$P_1=(\lambda/\mu)P_0$，得$\mu P_2=(\lambda+\mu)(\lambda/\mu)P_0-\lambda P_0$，$P_2=(\lambda/\mu)^2P_0$。依此类推，$P_n=(\lambda/\mu)^nP_0=\rho^nP_0$。

$\rho=\lambda/\mu<1$，否则将排队至无限远。由于$\sum_{n=0}^{\infty}P_n=1$，因此$P_0\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n=P_0\dfrac{1}{1-\rho}=1$，故$P_0=1-\rho$，$P_n=(1-\rho)\rho^n$，$n\geqslant 1$，$\rho<1$。

ρ通常理解为服务强度，上式中$\rho=1-P_0$刻画了服务机构的繁忙程度，又称服务机构的利用率。相关主要指标有以下几种。

（1）系统中平均顾客数，即队长的期望值

$$L_s=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n=\sum_{n=1}^{\infty}n(1-\rho)\rho^n=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda},\ 0<\rho<1$$

（2）队列中等待的平均顾客数，即队列长的期望值

$$L_q=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n=L_s-\rho=\frac{\rho\lambda}{\mu-\lambda}$$

（3）由于在$M/M/1$系统中，顾客逗留的时间W服从参数为$\mu-\lambda$的负指数分布，故系统中顾客逗留时间的期望值为$W_s=E(W)=\dfrac{1}{\mu-\lambda}$。

（4）在队列中顾客等待时间的期望值$W_q=W_s-\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{\rho}{\mu-\lambda}$。此式也称为Little公式。

【例11-3】某消费者协会一年365天可接受顾客的投诉。设申诉以$\lambda=4$件/天的泊松流到达，若该协会每天可处理申诉5件，当天处理不完将移交专门的小组处理，不影响当天的业务，试求：（1）一年内有多少天无申诉？（2）一年内有多少天处理不完当天的申诉？

【解】$\lambda=4$，$\mu=5$，$\rho=0.8$，于是

$$P_0=0.2,\ 365\times0.2=7,\ P_1=0.2\times0.8,\ P_2=0.2\times0.8^2$$

$$P_3=0.2\times0.8^3,\ P_4=0.2\times0.8^4,\ P_5=0.2\times0.8^5$$

$$365\times\left(1-\sum_{i=0}^{5}P_i\right)=79$$

【例11-4】高速公路入口收费处设有一个收费通道，汽车到达服从泊松分布，平均到达速率为100辆/h，收费时间服从负指数分布，平均收费时间为15 s/辆。求收费处空闲的概率、收费处忙的概率、系统中分别有1、2、3辆车的概率，并求L_s、L_q、W_s、W_q。

【解】根据题意有$\lambda=100$辆/h，$1/\mu=15$ s/辆$=1/240$ h/辆，于是$\rho=5/12$。

系统空闲的概率$P_0=1-\rho=7/12$，于是系统忙的概率为$1-P_0=5/12$。

有1辆车的概率为$P_1=\rho(1-\rho)=0.243$，有2辆车的概率为$P_2=\rho^2(1-\rho)=0.101$，有3辆车的概率为$P_3=\rho^3(1-\rho)=0.0421$。

$$L_s=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{5}{7},\ L_q=L_s-\rho=\frac{5}{7}-\frac{5}{12}=\frac{25}{84}$$

$$W_s=\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{1}{240-100}=\frac{1}{140}$$

$$W_q=W_s-\frac{1}{\mu}=\frac{1}{140}-\frac{1}{240}=\frac{1}{336}$$

如果单位时间内的服务成本为C_s，单位顾客停留单位时间的损失成本为C_w，目标函数为单位时间服务成本与顾客在系统逗留费用之和的期望值$z=C_s\mu+C_wL_s$，即

$$z = C_s\mu + C_w \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

求导 $\frac{dz}{d\mu} = C_s - C_w\lambda \frac{1}{(\mu - \lambda)^2}$，有

$$\mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{C_w}{C_s}\lambda}$$

11.2.2　*M/M/*1/*N* 模型

该类模型主要指系统的最大容量为 N。当顾客到达时，如果系统中已经有 N 个顾客，则离去，即系统中排队等待的顾客最多为 $N-1$。其示意图如图 11-8 所示。

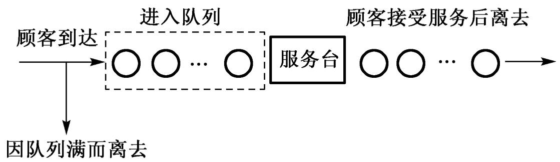


图 11-8　示意图

若只考虑稳态的情形，可作各状态间概率强度的转换关系图，如图 11-9 所示。

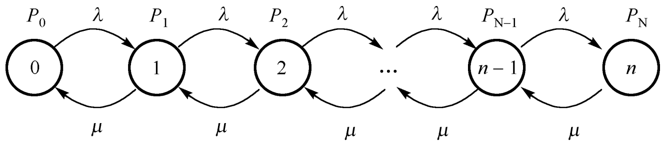


图 11-9　状态转移图

状态概率的稳态方程为

$$\mu P_1 = \lambda P_0;\ \mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} = (\lambda + \mu)P_n,\ n < N-1;\ \mu P_N = \lambda P_{N-1}$$

于是 $P_k = \rho P_{k-1} = \rho^k P_0 \quad (k = 1, 2, \cdots, N)$。

由于 $\sum_{k=0}^{N} P_k = 1$，故 $P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N}\rho^k} = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} & \rho \neq 1 \\ \frac{1}{N+1} & \rho = 1 \end{cases}$。

当 $\rho \neq 1$ 时

$$L_s = \sum_{k=0}^{N} kP_k = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}}$$

$$L_q = \sum_{k=0}^{N}(k-1)P_k = L_s - \frac{\lambda(1-P_N)}{\mu}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_e} = \frac{L_s}{\lambda(1-P_N)} = \frac{L_s}{\mu(1-P_0)}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_e} = \frac{L-\rho_e}{\lambda_e} = \frac{L}{\lambda_e} - \frac{1}{\mu} = W_s - \frac{1}{\mu}$$

平均到达率 λ 是在系统中有空时的平均到达率，当系统已满（$n = N$）时，到达率为 0，因此需要求出有效到达率 $\lambda_e = \lambda(1 - P_N)$，于是 $1 - P_0 = \lambda_e/\mu$。

【例 11-5】一个单人理发店，除理发椅外，还有 4 把椅子可供顾客等候。顾客到达发现没有座位空闲，就不再等待而离去。顾客到达的平均速率为 4 人/h，理发的平均时间为 10 min/人。顾客到达服从泊松流，理发时间服从负指数分布。求：

(1)顾客到达不用等待就可理发的概率;

(2)理发店里的平均顾客数以及等待理发的平均顾客数;

(3)顾客来店理发一次平均花费的时间及平均等待的时间;

(4)顾客到达后因客满而离去的概率;

(5)增加一张椅子可以减少的顾客损失率。

【解】显然，该系统中 $N = 4 + 1 = 5$, $\lambda = 4$, $\mu = 6$, $\rho = 2/3$，则

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} = 0.356,\ L_s = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}} = 1.423$$

$$L_q = L_s - \frac{\lambda(1-P_N)}{\mu} = 0.788,\ W_s = \frac{L_s}{\mu(1-P_0)} = 0.374$$

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = 0.207,\ \lambda_e = \lambda(1-P_N) = 3.808,\ P_5 = \rho^5 P_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times 0.356 = 0.0048。$$

当 $N = 6$ 时，$P_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} = 0.354$，$P_6 = \rho^6 P_0 = 0.0311$，$P_5 - P_6 = 0.0169$。

令 P_N 为顾客被拒绝的概率，则 $\lambda(1-P_N)$ 为单位时间内实际进入服务机构的顾客数，等于单位时间内实际服务完成的平均顾客数。每服务一个顾客能收入 G 元，纯利润为

$$z = \lambda(1-P_N)G - c_s\mu = \lambda G\frac{1-\rho^N}{1-\rho^{N+1}} - c_s\mu = \lambda\mu G\frac{\mu^N - \lambda^N}{\mu^{N+1} - \lambda^{N+1}} - c_s\mu$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\mu} = 0 \Rightarrow \rho^{N+1}\frac{N-(N+1)\rho+\rho^{N+1}}{(1-\rho^{N+1})^2} = \frac{c_s}{G}$$

μ 的最优解应该满足上式，一般是通过数值来求。对于一定的 N，将上式的左边作为 ρ 的函数作出图形；对于给定的 c_s/G，根据图形求出 μ^*/λ。

11.2.3 *M/M*/1/∞/*m* 模型

该类模型除了含有 *M/M*/1 的相关特征之外，增加的约束就是顾客的总体为 m 个。如 m 台机器因故障停机待修，m 个打字员共用一台打字机，m 个会计分析员同用一个计算机终端等。顾客总体虽只有 m 个，但顾客需要服务时，就进入队列等待，服务完毕后重新回到顾客源中，如此循环往复，其基本过程如图 11-10 所示。

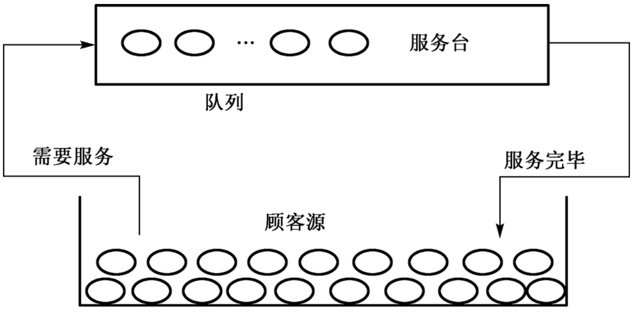


图 11-10　服务过程图

设各个顾客的到达率都是相同的 λ（如每台机器单位运转时间内发生的故障的概率或平均次数），系统外的顾客平均数为 $m - L_s$，对系统的有效到达率为 $\lambda_e = \lambda(m - L_s)$。

该模型的状态转移概率图如图 11-11 所示。

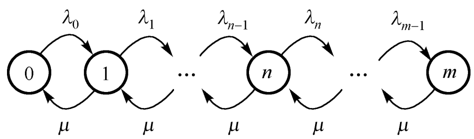


图 11-11　状态转移图

状态 0 转化为状态 1 的转移率为 λP_0，现有 m 台设备由完好转化为一台设备发生故障，转移率为 $m\lambda P_0$，状态 1 转化为状态 0 的转移率为 μP_1。随着状态的推移，考虑状态 $n-1$ 转移到状态 n 的情况，为 $(m-n+1)\lambda P_{n-1}$，而状态 n 转移到状态 $n-1$ 的转移率为 μP_n，故

$\mu P_1 = m\lambda P_0$，$\mu P_{n+1} + (m+n-1)\lambda P_{n-1} = [(m-n)\lambda+\mu]P_n$，$\mu P_m = \lambda P_{m-1}$，$\sum_{i=0}^{m} p_i = 1$。

则 $P_n = \dfrac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu^n}P_0 = \dfrac{m\lambda \times (m-1)\lambda \times \cdots \times (m-n+1)\lambda}{\mu^n}P_0 = \dfrac{m!}{(m-n)!}P_0$

由于 $\sum_{i=0}^{m} p_i = 1$，有 $P_0 = \dfrac{1}{\sum_{i=0}^{m} \dfrac{m!}{(m-n)!}\rho^n}$。

系统的主要指标表示为

$$L_s = m - \frac{\mu}{\lambda}(1-P_0),\ L_q = m-(1+\rho)(1-P_0) = L_s-(1-P_0)$$

$$W_s = \frac{m}{\mu(1-P_0)} - \frac{1}{\lambda},\ W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$$

【例 11-6】某车间有 5 台机器，每台机器的连续运转时间服从负指数分布，平均连续运行时间 15 min。有一个修理工，每次修理时间服从负指数分布，平均每次 12 min。求：

(1) 修理工空闲的概率；

(2) 5 台机器都出故障的概率；

(3) 出故障的平均台数；

(4) 平均停工时间；

(5) 平均等待修理时间；

(6) 评价这个系统的运行情况。

【解】由于 $m=5$，$\lambda = 1/15$，$\mu = 1/12$，$\rho = 0.8$，故

$$P_0 = \left[\frac{5!}{5!}(0.8)^0 + \frac{5!}{4!}(0.8)^1 + \frac{5!}{3!}(0.8)^2 + \frac{5!}{2!}(0.8)^3 + \frac{5!}{1!}(0.8)^4 + \frac{5!}{0!}(0.8)^5\right]^{-1} = 0.0073$$

$$P_5 = \frac{5!}{0!}(0.8)^5 P_0 = 0.287$$

$$L_s = 5 - \frac{1}{0.8}(1-0.0073) = 3.76,\ L_q = 3.76 - 0.993 = 2.77$$

$$W_6 = \frac{5}{\frac{1}{12}(1-0.007)} - 15 = 46,\ W_q = 46 - 12 = 34$$

机器停工时间过长，修理工几乎没有空闲时间，应当提高服务率减少修理时间或增加修理工人。

如果当服务率 $\mu = 1$ 时候修理费用为 c_s，单位时间每台机器运转得到收入为 G 元，平均运转台数为 $m - L_s$，则纯利润为

$$z = (m - L_s)G - c_s\mu = \frac{mG}{\rho}\frac{E_{m-1}\left(\frac{m}{\rho}\right)}{E_m\left(\frac{m}{\rho}\right)} - c_s\mu,\ E_m(x) = \sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}\mathrm{e}^{-x},\ \rho = \frac{m\lambda}{\rho}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_m(x)}{\mathrm{d}x} = E_{m-1}(x) - E_m(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\mu} = 0 \Rightarrow \frac{E_{m-1}\left(\frac{m}{\rho}\right)E_m\left(\frac{m}{\rho}\right) + \frac{m}{\rho}\left[E_m\left(\frac{m}{\rho}\right)E_{m-2}\left(\frac{m}{\rho}\right) - E_{m-1}^2\left(\frac{m}{\rho}\right)\right]}{E_m^2\left(\frac{m}{\rho}\right)} = \frac{\lambda c_s}{G}$$

μ 的最优解应该满足此式，一般是通过数值来求，将等式的左边作为 ρ 的函数作出图形，对于给定的 $\lambda c_s/G$，根据图形求出 μ^*/λ。

11.3　多服务台负指数分布排队模型

多服务台负指数分布也是常见的排队模型。本节将结合此类排队模型，深入研究其排队模型和主要指标。

11.3.1　*M/M/c* 模型

该模型主要指：顾客到达服从泊松分布，服务台服务服从负指数分布，有 c 个服务台。其主要过程如图 11-12 所示。

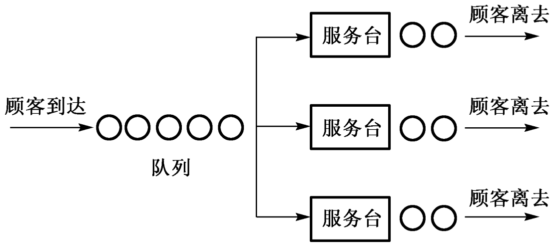


图 11-12　示意图

顾客到达后，进入队列尾端，当某一个服务台空闲时，队列中的第一个顾客即到该服务台接受服务，服务完毕后随即离去。各服务台互相独立且服务速率相同，即 $\mu_1 = \cdots = \mu_c$。

系统的服务速率与系统中的顾客数有关。当系统中的顾客数 k 不大于服务台个数，即 $1 \leqslant k \leqslant c$ 时，系统中的顾客全部在服务台中，这时系统的服务速率为 $k\mu$；当系统中的顾客数 $k > c$ 时，服务台中正在接受服务的顾客数仍为 c 个，其余顾客在队列中等待服务，这时系统的服务速率为 $c\mu$。于是 $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$，只有 $\frac{\lambda}{c\mu} < 1$ 时才不会排成无限的列队，称为系统的服务强度或服务机构的平均利用率。

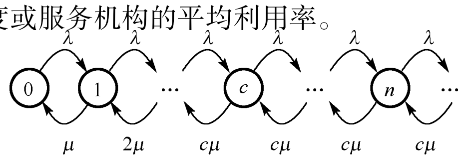


图 11-13　状态转移图

上述系统的状态转移图如图 11-13 所示。

对单服务台而言，系统中有一名顾客服务完成的转移率为 μP_1，两台服务台接受服务的顾客中有一个离去的转移率为 $2\mu P_2$。随着状态的推移，考

虑状态 n 转移到 $n-1$ 的情况，当 $n \leqslant c$ 时，状态转移率为 $n\mu P_n$；当 $n > c$ 时，只有 c 个服务台，最多有 c 个顾客被服务，$n-c$ 个顾客在等待，状态转移率为 $c\mu P_n$。于是

$$\mu P_1 = \lambda P_0,\ (n+1)\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} = (\lambda + n\mu)P_n(1 \leqslant n \leqslant c)$$

$$c\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} = (\lambda + c\mu)P_n(n > c)$$

求解上述方程，有

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)}},\ P_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & n \leqslant c \\ \dfrac{1}{c!c^{n-c}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & n > c \end{cases}$$

由于 $\rho = \dfrac{\lambda}{c\mu}$，可得 $L_s = c\rho + \dfrac{(c\rho)^c\rho}{c!(1-\rho)^2}P_0$，$L_s = L_q + \dfrac{\lambda}{\mu}$，$W_q = \dfrac{L_q}{\lambda}$，$W_s = \dfrac{L_s}{\lambda}$。

【例 11-7】某售票处有三个窗口，顾客到达服从泊松流，到达速率为 0.9 人/min，售票时间服从负指数分布，每个窗口的平均售票速率为 0.4 人/min。顾客到达后排成一队，依次到空闲窗口购票。求：

(1)所有窗口都空闲的概率；

(2)平均队长；

(3)平均等待时间及逗留时间；

(4)顾客到达后必须等待的概率。

【解】由于 $\lambda/\mu = 2.25$，$c = 3$，于是 $\lambda/\rho\mu \leqslant 1$。

(1) $P_0 = \left[\dfrac{(2.25)^0}{0!} + \dfrac{(2.25)^1}{1!} + \dfrac{(2.25)^2}{2!} + \dfrac{(2.25)^3}{3!} \times \dfrac{1}{1-0.75}\right]^{-1} = 0.0748$。

(2) $L_q = \dfrac{(2.25)^3 \times 0.75}{3! \times (1-0.75)^2} \times 0.0748 = 1.70$，$L_s = L_q + \dfrac{\lambda}{\mu} = 1.70 + 2.25 = 3.95$。

(3) $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{1.70}{0.9} = 1.89$，$W_s = W_q + \dfrac{1}{\mu} = \left(1.89 + \dfrac{1}{0.4}\right)\text{min} = 4.39\ \text{min}$。

(4) $P[n \geqslant 3] = \dfrac{(2.25)^3}{3!(1-0.75)} \times 0.0748 = 0.57$。

【例 11-8】某医院急诊室同时只能诊治一个病人，诊治时间服从指数分布，每个病人平均需要 15 min。病人按泊松分布到达，平均每小时到达 3 人。试分析此排队系统。

【解】该服务系统属于 $M/M/1$ 系统，$\lambda = 3$，$\mu = 4$，于是 $\rho = 0.75$，$P_0 = 1-\rho = 0.25$。

需要等待的概率为 $1 - P_0 = 0.75$；

急诊室内外的病人平均数为 $L_s = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda} = 3$；

急诊室外排队等待的病人平均数为 $L_q = \rho L_s = 2.25$；

病人在急诊室内外的平均逗留时间为 $W_s = \dfrac{1}{\mu - \lambda} = 1\ \text{min}$；

病人平均等候时间为 $W_q = \rho W_s = 0.75\ \text{min}$。

如果病人平均逗留时间不超过半小时，则平均服务时间应该减小。由于 $W_s = \dfrac{1}{\mu - \lambda} < 0.5$，$\lambda = 3$，有 $\mu \geqslant 5$，即平均服务时间为 12 min，减少 3 min。

如果医院希望候诊的病人 90% 以上都有座位，则候诊室至少应安排多少座位？如果安排 x 个座位，则加上急诊室 1 个座位，共有 $x+1$ 个座位。于是

$$P(N \leqslant x+1) = 1 - P(N > x+1) \geqslant 0.9$$

则 $P(N > x+1) \leqslant 0.1$，有 $\rho^{x+1+1} = \rho^{x+2} \leqslant 0.1$，则 $x \geqslant 6$。

【例 11-9】如果基于【例 11-8】，医院准备增强急诊室的服务能力，同时能够诊治 2 个病人，且平均服务率相同。试分析该服务系统。

【解】由于增加了一个服务台，则 $\lambda = 3$，$\mu = 4$，$c = 2$，故 $\rho = \dfrac{\lambda}{c\mu} = 0.375$。则有

$$P_0 = \left[1 + 0.75 + \frac{(0.75)^2}{2!(1-0.375)}\right]^{-1} = \frac{1}{2.2} = \frac{5}{11},\ L_q = \frac{0.75^2 \times 0.375}{2!(1-0.375)^2} \times \frac{5}{11} = 0.12$$

$$L_s = L_q + \rho = 0.87,\ W_s = \frac{L_s}{\lambda} = 0.29,\ W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 0.04$$

病人必须等候的概率是 $P(N \geqslant 2) = \dfrac{0.75^2}{2!(1-0.375)} \times \dfrac{5}{11} \approx 0.2$。

将【例 11-8】与【例 11-9】进行比较，得到表 11-5。

表 11-5　两个服务系统比较表

指　　标	M/M/2 型	M/M/1 型
必须等待的概率 P	0.2	0.75
平均队长 L_s /人	0.87	3
平均队列长 L_q /人	0.12	2.25
平均逗留时间 W_s /min	17.4	60
平均等待时间 W_q /min	2.4	45
空闲的概率 P_0	0.45	0.25

假定 C'_s 是每个服务台的单位成本，C_w 是每个顾客在系统停留单位时间的费用，L 是系统中顾客平均数 L_s 或队列中等待的顾客平均数 L_q（随 c 值的不同而不同），于是

$$z = C'_s c + C_w L$$

采用边际分析分析法，最佳的机器数量 c^* 可以基于 $z(c^*) \leqslant z(c^*-1)$，$z(c^*) \leqslant z(c^*+1)$ 求得，即 $L(c^*) - L(c^*+1) \leqslant \dfrac{C'_s}{C_w} \leqslant L(c^*-1) + L(c^*)$。依次求出 $c = 1, 2, 3, \cdots$ 时 L 值，并作两相邻 L 值之差，即可确定 c^*。

11.3.2　*M/M/c/N* 模型

与上述 $M/M/c$ 模型相比，该模型唯一增加的就是系统有容量限制（N）。当系统中的顾客数少于 N 时，到达的顾客就进入系统；当正好等于 N 时，到达的顾客就被拒绝，如图 11-14 所示。

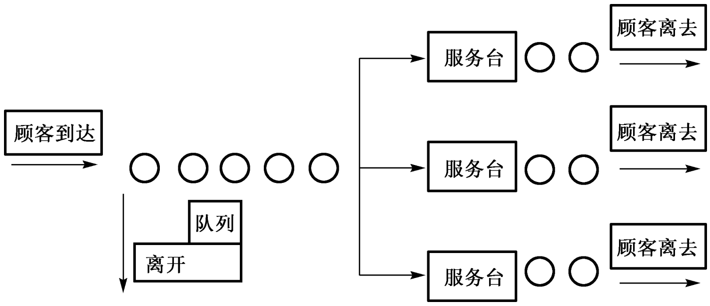


图 11-14　服务示意图

假设顾客到达的速率为 λ ，c 个服务台的速率均为 μ ，$\rho = \dfrac{\lambda}{c\mu}$，由于系统不会无限制地增加顾客，因此不需要对 ρ 加以限制。其状态转移图如图 11-15 所示。

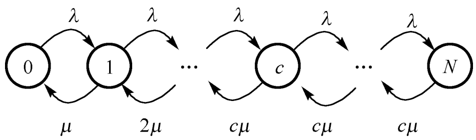


图 11-15　状态转移图

状态转移方程描述为

$$\lambda P_0 = \mu P_1,\ \lambda P_0 + 2\mu P_2 = (\lambda + \mu)P_1,\ \lambda P_{c-1} + c\mu P_{c+1} = (\lambda + c\mu)P_c,\ \lambda P_{N-1} = c\mu P_N$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n = 1$ ，可得

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{c} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{c^c}{c!} \times \frac{\rho(\rho^c - \rho^N)}{1-\rho}\right]^{-1},\ \rho \neq 1$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(c\rho)^n}{n!}P_0 & 0 \leqslant n \leqslant c \\ \dfrac{(c\rho)^n}{c!}P_0 & c \leqslant n \leqslant N \end{cases},\ L_q = \frac{\rho\,(c\rho)^c}{c!(1-\rho)^2}[1 - \rho^{N-c} - (N-c)\rho^{N-c}(1-\rho)]P_0$$

$$L_s = L_q + c\rho(1 - P_N)\ ,\ W_q = \frac{L_q}{\lambda_e} = \frac{L_q}{\lambda(1-P_N)};\ W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

如果 $N = c$ ，则为即时制，如街头的停车场就不允许排队等待空位，也被称为爱尔朗呼唤损失公式，广泛应用于电话系统设计中。

【例 11-10】旅馆有 8 个单人房间，旅客到达服从泊松流，平均速率为 6 人/天，旅客平均逗留时间为 2 天，求：每天客房平均占用数；旅馆客满的概率。

【解】由于 $N = c = 8$，$\lambda = 6$，$\dfrac{1}{\mu} = 2$，$c\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = 12$ ，因此

$$P_0 = \left[\frac{(12)^0}{0!} + \frac{(12)^1}{1!} + \frac{(12)^2}{2!} + \frac{(12)^3}{3!} + \frac{(12)^4}{4!} + \frac{(12)^5}{5!} + \frac{(12)^6}{6!} + \frac{(12)^7}{7!} + \frac{(12)^8}{8!}\right]^{-1}$$
$$= 3.963 \times 10^{-5}$$

$$P_8 = \frac{(c\rho)^n}{n!}P_0 = \frac{(12)^8}{8!} \times 3.963 \times 10^{-5} = 0.423$$

$$L = c\rho(1 - P_c) = 12 \times (1 - 0.423) = 6.924$$

于是，每天客房的占用数为 6.9 间；8 间房全满的概率为 0.423。

11.3.3　$M/M/c/\infty/m$ 模型

与 $M/M/c$ 模型相比，该模型的顾客源有限。其示意图如图 11-16 所示。

设顾客总体有限数为 m ，且 $m > c$ ，顾客到达率 λ 是按每个顾客来考虑的。如在机器管理问题中，有 m 台机器和 c 个修理工人，λ 指每台机器每单位运转时间出故障的期望次数，系统中顾客数 n 就类似于出故障的机器台数。假定 c 个工人修理技术相同，修理时间都服从参数为 μ 的负指数分布，故障的修复时间和正在生产的机器是否发生故障是相互独立的，因此有

$$P_0 = \frac{1}{m!} \cdot \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{c} \dfrac{1}{k!(m-k)!}\left(\dfrac{c\rho}{m}\right)^k + \dfrac{c^c}{c!}\sum\limits_{k=c+1}^{m} \dfrac{1}{(m-k)!}\left(\dfrac{\rho}{m}\right)^k},\ \rho = \frac{m\lambda}{c\mu}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & 0 \leqslant n \leqslant c \\ \dfrac{m!}{(m-n)!c!c^{n-c}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & c+1 \leqslant n \leqslant m \end{cases}$$

$$L_s = \sum_{n=1}^{m} nP_n,\ L_q = \sum_{n=c+1}^{m}(n-c)P_n$$

有效到达率 λ_e 为单位时间内出现故障的机器数 $\lambda_e = \lambda(m - L_s)$。于是

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu} = L_q + \frac{\lambda}{\mu}(m - L_s),\ W_s = \frac{L_s}{\lambda_e},\ W_q = \frac{L_q}{\lambda_e}$$

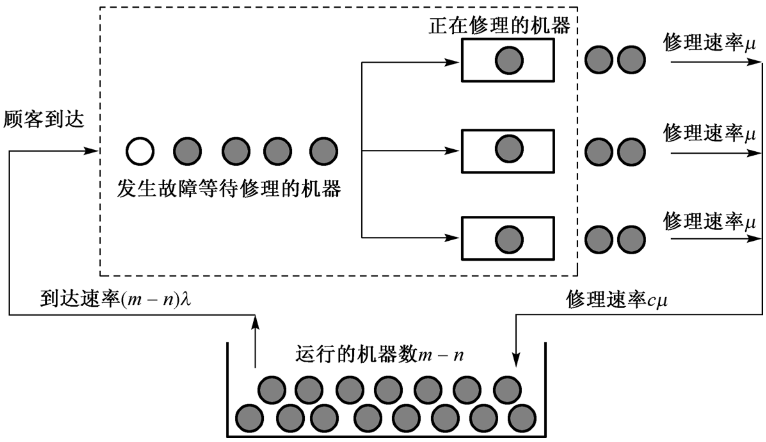


图 11-16　示意图

【例 11-11】车间有 5 台机器，每台机器的故障率为 1 次/h，有 2 个修理工负责修理这 5 台机器，工作效率相同，为 4 台/h。求：

(1)等待修理的平均机器数；

(2)需要修理的平均机器数；

(3)每小时发生故障的平均机器数，即有效损坏率；

(4)平均等待修理的时间；

(5)平均停工时间。

【解】$m = 5$，$\lambda = 1$，$\mu = 4$，$c = 2$，$\rho = \dfrac{m\lambda}{c\mu}$，$\dfrac{c\rho}{m} = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{1}{4}$，$\dfrac{\rho}{m} = \dfrac{1}{8}$，于是

$$P_0 = \frac{1}{m!}\cdot\frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{c}\frac{1}{k!(m-k)!}\left(\frac{c\rho}{m}\right)^k + \frac{c^c}{c!}\sum_{k=c+1}^{m}\frac{1}{(m-k)!}\left(\frac{\rho}{m}\right)^k}$$

$$=\frac{1}{5!}\times\left[\frac{1}{0!\ 5!}\left(\frac{1}{4}\right)^0+\frac{1}{1!\ 4!}\left(\frac{1}{4}\right)^1+\frac{1}{2!\ 3!}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{2^2}{2!}\cdot\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{8}\right)^3+\frac{2^2}{2!}\cdot\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{8}\right)^4\right.$$

$$\left.+\frac{2^2}{2!}\cdot\frac{1}{0!}\left(\frac{1}{8}\right)^5\right]^{-1}$$

$$=0.3149$$

$P_1 = 0.394$，$P_2 = 0.197$，$P_3 = 0.074$，$P_4 = 0.018$，$P_5 = 0.002$

(1) $L_q = \displaystyle\sum_{n=c+1}^{m}(n-c)P_n = P_3 + 2P_4 + 3P_5 = 0.118$；

(2) $L_s = \sum_{n=1}^{m} nP_n = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 = 1.092$；

(3) $\lambda_e = \lambda(m - L) = 1 \times (5 - 1.092) = 3.908$；

(4) $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda_e} = \dfrac{0.118}{3.908}\text{h} = 0.03\ \text{h} = 1.8\ \text{min}$；

(5) $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda_e} = \dfrac{1.902}{3.908}\text{h} = 0.28\ \text{h} = 16.8\ \text{min}$。

11.4　一般服务时间模型

在现实服务活动中，除了上述服务时间服从负指数分布模型之外，还存在其他几种类型的模型。

11.4.1　Pollaczek-Kbintchine(P-K)公式

一般而言，无论系统的服务时间服从何种分布，系统中顾客数的期望值 = 队列中的顾客数的期望值 + 服务机构中顾客数的期望值，在系统中逗留时间的期望值 = 排队等候时间的期望值 + 服务时间的期望值，即

$$L_s = L_q + L_{se},\ W_s = W_q + E(T)$$
$$L_s = \lambda W_s,\ L_q = \lambda W_q$$

在有限源和队长限制的情况下，λ 应该变成 λ_e。

一般服务时间与 $M/M/1$ 的不同之处，就是服务时间 T 的分布是一般的，但期望值和方差都存在，$\rho = \lambda E(T) < 1$。故 $L_s = \rho + \dfrac{\rho^2 + \lambda^2 \text{Var}(T)}{2(1-\rho)}$，此即 Pollaczek-Khintchine(P-K)公式。

【例 11-12】某项工序执行过程中，工件按照平均 2.5 min 时间间隔的负指数分布到达，工件加工时间平均为 2 min。如果加工时间也服从负指数分布，求加工所需的平均逗留时间和等待时间。如果任何工件加工至少要等待 1 min，服务时间并不服从负指数分布，服从如下分布，求加工所需的平均逗留时间和等待时间：

$$f(y) = \begin{cases} e^{-y+1} & y \geq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

【解】根据题意，有

$\lambda = 0.4,\ \mu = 0.5,\ \rho = 0.8$；

$W_s = \dfrac{1}{\mu - \lambda} = 10\text{min},\ W_q = \dfrac{\rho}{\mu - \lambda} = 8\text{min}$；

$Y = 1 + X,\ E(Y) = 2,\ \text{Var}(Y) = 1,\ \rho = 0.8$；

$L_s = 2.8,\ L_q = L_s - \rho = 2$；

$W_s = \dfrac{L_s}{\lambda} = 7,\ W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = 5$。

11.4.2　定长服务时间模型

定长服务时间模型可以表示为 $M/D/1$，如工件在某个工序上进行加工等。于是

$$T = \frac{1}{\mu},\ \text{Var}(T) = 0,\ L_s = \rho + \frac{\rho^2}{2(-\rho)}$$

通常，一般服务时间分布的 L_q 和 W_q 中以定长服务时间的为最小，即服务时间越有规律，等候的时间就越短。

【例 11-13】某医院有一台自动检测人体某项指标的机器，要求需要检验的病人按照泊松分布到达，平均每小时 4 个顾客，检验每个病人所需要的时间为 6 min。求在检验室内的病人数量 L_s 、等候检验的病人数量 L_q 、每个病人在室内逗留时间 W_s 、每个病人平均等待检验的时间 W_q 。

【解】依据题意，有 $\lambda = 4$，$E(T) = \frac{1}{10}$，$\rho = \frac{4}{10}$，$\mathrm{Var}[T] = 0$ ，则

$$L_s = 0.4 + \frac{(0.4)^2}{2(1-0.4)} = 0.533 \text{ , } L_q = 0.533 - 0.4 = 0.133 \text{ ;}$$

$$W_s = \frac{0.533}{4}\text{min} = 0.133 \text{ min , } W_q = \frac{0.133}{4}\text{ min} = 0.033 \text{ min 。}$$

11.4.3 爱尔朗服务模型

如果顾客接受服务必须经过 k 个服务窗口，在每个窗口的服务时间 T_i 是相互独立的，均服从相同的负指数分布(参数为 $k\mu$)，则 $T = \sum_{i=1}^{k} T_i$ 服从爱尔朗分布。于是

$$E(T_i) = \frac{1}{k\mu},\ \mathrm{Var}(T_i) = \frac{1}{k^2\mu^2}E(T_i) = \frac{1}{\mu},\ \mathrm{Var}(T_i) = \frac{1}{k\mu^2}$$

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2 + \frac{\lambda^2}{k\mu^2}}{2(1-\rho)} = \rho + \frac{(k+1)\rho^2}{2k(1-\rho)};\ L_q = \frac{(k+1)\rho^2}{2k(1-\rho)},\ W_s = \frac{L_s}{\lambda},\ W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

【例 11-14】假定加工某种产品需要经过 4 个工序，每个工序的时间服从负指数分布，期望值为 2 h，工件到达服从泊松分布，平均到达率为 5.5 个/周(一周 6 天，每天 8 h)，问加工完产品的期望时间。

【解】由于 $\lambda = 5.5$ 个/周。$1/\mu$ 为平均每套所需要的时间，$1/4\mu$ 为平均每工序所需要的时间，有

$$1/4\mu = 2 \Rightarrow \mu = 1/8 \text{ 个/h} = 6 \text{ 套/周},\ \rho = \frac{5.5}{6}$$

$$E(T_i) = 2,\ \mathrm{Var}(T_i) = \frac{1}{24^2}E(T) = 8,\ \mathrm{Var}(T) = \frac{1}{4 \times 6^2}$$

期望时间 $L_s = \rho + \frac{\rho^2 + \frac{\lambda^2}{k\mu^2}}{2(1-\rho)} = 7.2188$，$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = 1.3$ 周。

本章要点

排队系统不仅仅用于服务系统设计中，也可以用于生产系统的设计。其本质是确定相关排队系统的参数，为系统设计提供参考。

排队系统的识别是求解排队系统的重要前提。通常可以将其划分为单服务台负指数排队系统、多服务台负指数排队系统、一般服务时间的排队系统。只要确定排队系统的类型，即可运用理论推导获得的公式进行求解。

关键公式

- $M/M/1$ 模型

$$L_s=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n=\sum_{n=1}^{\infty}n(1-\rho)\rho^n=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda},\ 0<\rho<1$$

$$L_q=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n=L_s-\rho=\frac{\rho\lambda}{\mu-\lambda},\ W_s=E(W)=\frac{1}{\mu-\lambda},\ W_q=W_s-\frac{1}{\mu}=\frac{\rho}{\mu-\lambda}$$

- $M/M/1/N$ 模型

当 $\rho\neq 1$ 时，$L_s=\sum_{k=0}^{N}kP_k=\frac{\rho}{1-\rho}-\frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}}$

$$L_q=\sum_{k=0}^{N}(k-1)P_k=L_s-\frac{\lambda(1-P_N)}{\mu},\ W_s=\frac{L_s}{\lambda_e}=\frac{L_s}{\lambda(1-P_N)}=\frac{L_s}{\mu(1-P_0)}$$

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda_e}=\frac{L-\rho_e}{\lambda_e}=\frac{L}{\lambda_e}-\frac{1}{\mu}=W_s-\frac{1}{\mu}$$

- $M/M/1/\infty/m$ 模型

$$L_s=m-\frac{\mu}{\lambda}(1-P_0),\ L_q=m-(1+\rho)(1-P_0)=L_s-(1-P_0),$$

$$W_s=\frac{m}{\mu(1-P_0)}-\frac{1}{\lambda},\ W_q=W_s-\frac{1}{\mu}$$

- $M/M/c$ 模型

$$L_s=c\rho+\frac{(c\rho)^c\rho}{c!(1-\rho)^2}P_0,\ L_s=L_q+\frac{\lambda}{\mu},\ W_q=\frac{L_q}{\lambda},\ W_s=\frac{L_s}{\lambda}$$

- $M/M/c/N$ 模型

$$L_q=\frac{\rho(c\rho)^c}{c!(1-\rho)^2}[1-\rho^{N-c}-(N-c)\rho^{N-c}(1-\rho)]P_0$$

$$L_s=L_q+c\rho(1-P_N),\ W_q=\frac{L_q}{\lambda_e}=\frac{L_q}{\lambda(1-P_N)};\ W_s=W_q+\frac{1}{\mu}$$

- $M/M/c/\infty/m$ 模型

$$L_s=L_q+\frac{\lambda_e}{\mu}=L_q+\frac{\lambda}{\mu}(m-L_s),\ W_s=\frac{L_s}{\lambda_e},\ W_q=\frac{L_q}{\lambda_e}$$

案例解析

该问题可以近似看成两个独立的排队系统。其中，系统 1 机翼组件冲压系统为多服务台服务系统，而系统 2 机翼组件检查系统为单服务台的服务系统。

系统 1 的主要参数是 $\lambda=7$，$\mu=1$，$c_s=7$，$c_w=8$；

系统 2 的主要参数是 $\lambda=8$，$\mu=7$，$c_s=17$，$c_w=8$。

按照本节提出的相应模型，针对现状求解的结果见表 11-6。

表 11-6　两个服务系统表 1

指　　标	系　统　1	系　统　2
在制品库存/件	0.52	6.13
在系统中的数量	7.52	7

（续表）

指　　标	系　统　1	系　统　2
等待时间/h	0.074	0.875
一件产品在系统中的时间/h	1.074	1
成本/(美元/h)	130.14	73

方案 1 的求解结果见表 11-7。

表 11-7　两个服务系统表 2

指　　标	系　统　1	系　统　2
在制品库存/件	2.65	6.13
在系统中的数量	11.05	7
等待时间/h	0.38	0.875
一件产品在系统中的时间/h	1.58	1
成本/(美元/h)	153.38	73

方案 2 的求解结果见表 11-8。

表 11-8　两个服务系统表 3

指　　标	系　统　1	系　统　2
在制品库存/件	0.52	4.41
在系统中的数量	7.52	5.25
等待时间/h	0.074	0.63
一件产品在系统中的时间/h	1.074	0.75
成本/(美元/h)	130.14	61

推荐的方案是：增加压力，起用年轻的质检员，求解结果见表 11-9。

表 11-9　两个服务系统表 4

指　　标	系　统　1	系　统　2
在制品库存/件	0.09	4.41
在系统中的数量	5.69	5.25
等待时间/h	0.013	0.63
一件产品在系统中的时间/h	0.813	0.75
成本/(美元/h)	120.51	61

练习题

1. 某消费者协会一年 365 天可接受顾客的投诉。设申诉以 $\lambda = 4$ 件/天的普阿松流到达，该协会每天可处理申诉 5 件，当天处理不完的话将移交专门的小组处理，不影响当天的业务，试求：

(1)一年内有多少天无一件申诉？

(2)一年内有多少天处理不完当天的申诉？

2. 某理发店有 4 名理发员，除了理发椅子外，还有 16 把椅子供等待的顾客使用。顾客按照普阿松流到达，平均每小时 20 人，当所有的椅子均没有空闲的时候，顾客将不再进入而自动离去。理发员对每名顾客的服务时间服从负指数分布，$1/\mu = 11.5$ min，试求：

(1)顾客从进理发店起到理发结束的平均时间；

（2）新到顾客离去的概率；

（3）系统的有效到达率；

（4）服务员的平均忙期。

3. 某只有1名服务员的排队系统，其等待空间总共可容纳3名顾客，即系统中总的顾客数不能超过4人，已知对每名顾客的服务时间服从负指数分布，平均为5 min，顾客到达服从普阿松分布，平均每小时为10人，试求：

（1）系统中顾客数分别为0、1、2、3、4的概率；

（2）系统中顾客的平均数；

（3）1名新到顾客需要排队等待服务的概率；

（4）1名新到顾客未能进入该排队系统的概率。

4. 考虑一个顾客输入为普阿松流、服务时间为负指数分布的排队服务系统，求：

（1）有一个服务站时，当平均服务时间为6 s，到达时间分别是每分钟有5、9、9.9名顾客时的 L_s、L_q、W_s、W_q。

（2）当有两个并联服务站时，当平均服务时间为12 s，到达时间分别是每分钟有5、9、9.9名顾客时的 L_s、L_q、W_s、W_q。

5. 送到一台研磨机的工件按照普阿松流到达，平均每小时为25件，研磨一个工件所需时间为负指数分布，平均需要2 min，试求：

（1）该研磨机空闲的概率；

（2）一个工件从送达到研磨完超过20 min的概率；

（3）等待研磨的工件平均数；

（4）等待研磨的工件在8～10件之间的概率。

（5）在下列条件下，分别计算等待研磨的工件数。研磨的速度加快20%；到达的工件减少20%；到达的工件减少20%同时研磨速度加快20%。

6. 某医院有一台心电图机器，做心电图的病人按照普阿松流到达，平均每小时5人。每个病人做心电图的时间服从负指数分布，平均每个人10 min。设心电图室有5把椅子，当病人到达时如果没有椅子，则直接离去而去其他医院就诊。试计算 L_s、L_q、W_s、W_q 以及由于等候无座椅自动离去的病人占病人总数的比例。

7. 某企业有5台运货车辆，已知每台车每运行100 h平均需要维修2次，每次需要20 min，以上分别服从普阿松和负指数分布，求该企业全部车辆正常运行的概率及分别有1、2、3辆车不能正常运行时的概率。

附　　录

附　录　A

1. 凸集

设 K 是 n 维欧氏空间的一点集，若任意两点 $\boldsymbol{X}^{(1)} \in K$、$\boldsymbol{X}^{(2)} \in \boldsymbol{K}$ 的连线上的所有点 $\alpha\boldsymbol{X}^{(1)}+(1-\alpha)\boldsymbol{X}^{(2)} \in \boldsymbol{K}(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$，则称 K 为凸集。凸集没有凹入部分，其内部没有空洞，连接集合中任意两点的线段都在集合之中。

2. 凸组合

设 $\boldsymbol{X}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{X}^{(k)}$ 是 n 维欧氏空间 E^n 中的 k 个点。若存在 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$，且 $0 \leqslant \mu_i \leqslant 1(i=1, 2, \cdots, k)$，$\sum_{i=1}^{k}\mu_i=1$，使 $\boldsymbol{X}=\mu_1\boldsymbol{X}^{(1)}+\mu_2\boldsymbol{X}^{(2)}+\cdots+\mu_k\boldsymbol{X}^{(k)}$，则称 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{X}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{X}^{(k)}$ 的凸组合(当 $0<\mu_i<1$ 时，称为严格凸组合)。

3. 顶点

设 K 是凸集，$\boldsymbol{X} \in K$，若 $\boldsymbol{X}$ 不能用不同的两点 $\boldsymbol{X}^{(1)} \in K$ 和 $\boldsymbol{X}^{(2)} \in K$ 的线性组合表示为 $\boldsymbol{X}=\alpha\boldsymbol{X}^{(1)}+(1-\alpha)\boldsymbol{X}^{(2)}(0<\alpha<1)$，则称 $\boldsymbol{X}$ 为 K 的一个顶点(或极点)。

定理 1：若线性规划问题存在可行域，则其可行域 $D=\left\{\boldsymbol{X} \middle| \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j x_j=b, x_j \geqslant 0\right\}$ 是凸集。

证明：为了证明其可行域是凸集，只要证明 D 中任意两点连线上的点必然在 D 内即可。设 D 内的任意两点 $\boldsymbol{X}^{(1)}=(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}^{(2)}=(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}^{(1)} \neq \boldsymbol{X}^{(2)}$，则有 $\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j x_j^{(1)}=b$，$x_j^{(1)} \geqslant 0(j=1, 2, \cdots, n)$；$\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j x_j^{(2)}=b$，$x_j^{(2)} \geqslant 0(j=1, 2, \cdots, n)$。

令 $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 为 $x^{(1)}$、$x^{(2)}$ 连线上的任意一点，即

$$\boldsymbol{X}=\alpha\boldsymbol{X}^{(1)}+(1-\alpha)\boldsymbol{X}^{(2)} \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$$

$\boldsymbol{X}$ 的每一个分量是 $x_j=\alpha x_j^{(1)}+(1-\alpha)x_j^{(2)}$，将它代入约束条件，得到

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j x_j &= \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j\left[\alpha x_j^{(1)}+(1-\alpha)x_j^{(2)}\right] \\
&= \alpha\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j x_j^{(1)}+\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j x_j^{(2)}-\alpha\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{P}_j x_j^{(2)} \\
&= \alpha b+b-\alpha b=b
\end{aligned}$$

又因 $x_j^{(1)}$、$x_j^{(2)} \geqslant 0$，$\alpha>0$，$1-\alpha>0$，所以 $x_j \geqslant 0(j=1, 2, \cdots, n)$。由此可见，$\boldsymbol{X} \in D$，$D$ 是凸集。

引理 1：线性规划问题的可行解 $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 为基可行解的充要条件是 $\boldsymbol{X}$ 的正

分量所对应的系数列向量是线性独立的。

证明：必要性可由基可行解的定义证明。充分性证明：若向量 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_k$ 线性独立，必有 $k \leqslant m$；当 $k = m$ 时，它们构成一个基，$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots x_k, 0, \cdots, 0)$ 为相应的基可行解。

当 $k < m$ 时，则一定可以从其余的列向量中取出 $m - k$ 个与 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_k$ 构成最大的线性独立向量组，其对应的解正好为 $\boldsymbol{X}$，所以根据定义它是基可行解。

定理 2：线性规划问题的基可行解 $\boldsymbol{X}$ 对应于可行域 D 的顶点。

证明：假设基可行解 $\boldsymbol{X}$ 的前 m 个分量为正，故 $\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{P}_j x_j = b$。

若 $\boldsymbol{X}$ 不是基可行解，则其正分量所对应的系数列向量 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_m$ 线性相关，即存在一组不全为零的数 α_i（$i = 1, 2, \cdots, m$），使得 $\alpha_1 \boldsymbol{P}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{P}_2 + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{P}_m = 0$。用一个 $\mu > 0$ 的数将上式合成得到

$$(x_1 - \mu\alpha_1)\boldsymbol{P}_1 + (x_2 - \mu\alpha_2)\boldsymbol{P}_2 + \cdots + (x_m - \mu\alpha_m)\boldsymbol{P}_m = b$$
$$(x_1 + \mu\alpha_1)\boldsymbol{P}_1 + (x_2 + \mu\alpha_2)\boldsymbol{P}_2 + \cdots + (x_m + \mu\alpha_m)\boldsymbol{P}_m = b$$

令：$\boldsymbol{X}^{(1)} = ((x_1 - \mu\alpha_1), (x_2 - \mu\alpha_2), \cdots, (x_m - \mu\alpha_m), 0, \cdots, 0)$

$\boldsymbol{X}^{(2)} = ((x_1 + \mu\alpha_1), (x_2 + \mu\alpha_2), \cdots, (x_m + \mu\alpha_m), 0, \cdots, 0)$

由 $\boldsymbol{X}^{(1)}$、$\boldsymbol{X}^{(2)}$ 可得 $\boldsymbol{X} = \frac{1}{2}\boldsymbol{X}^{(1)} + \frac{1}{2}\boldsymbol{X}^{(2)}$，即 $\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{X}^{(1)}$、$\boldsymbol{X}^{(2)}$ 连线的中点。当 μ 充分小时，可保证 $x_i \pm \mu\alpha_i \geqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$，即 $\boldsymbol{X}^{(1)}$，$\boldsymbol{X}^{(2)}$ 是可行解，X 不是可行域 D 的顶点。

若 $\boldsymbol{X}$ 不是可行域 D 的顶点，故在 D 中可找到不同的两点 $\boldsymbol{X}^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ... x_n^{(1)})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ... x_n^{(2)})^{\mathrm{T}}$，使 $\boldsymbol{X} = \alpha\boldsymbol{X}^{(1)} + (1 - \alpha)\boldsymbol{X}^{(2)}$，$0 < \alpha < 1$。设 $\boldsymbol{X}$ 是基可行解，对应向量组 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_m$ 线性独立。当 $j > m$ 时，有 $x_j = x_j^{(1)} = x_j^{(2)} = 0$，由于 $\boldsymbol{X}^{(1)}$、$\boldsymbol{X}^{(2)}$ 是可行域的两点，应满足 $\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{P}_j x_j^{(1)} = b$ 与 $\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{P}_j x_j^{(2)} = b$。

将这两式相减，即得 $\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{P}_j (x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) = 0$。因 $\boldsymbol{X}^{(1)} \neq \boldsymbol{X}^{(2)}$，所以系数 $(x_j^{(1)} - x_j^{(2)})$ 不全为零，故向量组 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_m$ 相性相关，即 $\boldsymbol{X}$ 不是基可行解。

引理 2：若 K 是有界凸集，则任何一点 $\boldsymbol{X} \in K$ 可表示为 K 的顶点的凸组合。

定理 3：若可行域有界，线性规划模型的目标函数一定可在其可行域的顶点上达到最优。

证明：设 $\boldsymbol{X}^{(1)}$，$\boldsymbol{X}^{(2)}$，…，$\boldsymbol{X}^{(k)}$ 是可行域的顶点，若 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 不是顶点，且目标函数在 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 处达到最优 $z^* = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(0)}$（标准型是 $z^* = \max z$），因 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 不是顶点，所以它可以用 D 的顶点线性表示为 $\boldsymbol{X}^{(0)} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{X}^{(i)}$，$\alpha_i > 0$，$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$。因此 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(0)} = \boldsymbol{C}\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{X}^{(i)} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(i)}$。

在所有的顶点中，必然能找到某一个顶点 $\boldsymbol{X}^{(m)}$，使 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(m)}$ 是所有 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(i)}$ 中最大者，并且将 $\boldsymbol{X}^{(m)}$ 代替上式中的所有 $\boldsymbol{X}^{(i)}$，于是 $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(i)} \leqslant \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(m)} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(m)}$。

由此得到 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(0)} \leqslant \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(m)}$。根据假设 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(0)}$ 是最大值，所以只能有 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(0)} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(m)}$，即目标函数在顶点 $\boldsymbol{X}^{(m)}$ 处也达到最大值。

根据以上讨论，可以得到以下几个重要结论：

线性规划问题的可行域是凸集（**定理 1**）；凸集的每个顶点对应一个基可行解（**定理 2**），

基可行解个数是有限的，当然凸集的顶点也是有限的；若线性规划有最优解，必在可行域某顶点上达到(**定理3**)，亦即在有限个基可行解中间存在最优解。因此，可以在有限个基可行解中去找最优解。该方法就是一种在基可行解中搜索最优解的算法。

【例A-1】(三角形内的点坐标表示)设 X 是三角形中的任意一点，$X^{(1)}$、$X^{(2)}$ 和 $X^{(3)}$ 是三角形的三个顶点，试用三个顶点的坐标表示 X。

【解】任选一顶点 $X^{(2)}$，作一条连线 $XX^{(2)}$；并延长交于 $X^{(1)}$、$X^{(3)}$ 连接线上一点 X'。因 X' 是 $X^{(1)}$、$X^{(3)}$ 连线上的一点，故可用 $X^{(1)}$、$X^{(3)}$ 线性组合表示为

$$X' = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(3)},\ 0 < \alpha < 1$$

又因 X 是 X' 与 $X^{(2)}$ 连线上的一个点，故 $X = \lambda X' + (1-\lambda)X^{(2)}$，$0 < \lambda < 1$。将 X' 的表达式代入上式得到

$$X = \lambda[\alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(3)}] + (1-\lambda)X^{(2)} = \lambda\alpha X^{(1)} + \lambda(1-\alpha)X^{(3)} + (1-\lambda)X^{(2)}$$

令 $\mu_1 = \alpha\lambda$，$\mu_2 = (1-\lambda)$，$\mu_3 = \lambda(1-\alpha)$，于是

$$X = \mu_1 X^{(1)} + \mu_2 X^{(2)} + \mu_3 X^{(3)},\ \sum_i \mu_i = 1,\ 0 < \mu_i < 1$$

线性规划模型解的判别定理证明：针对无穷多最优解判别定理，将非基变量 x_{m+k} 换入基变量中，找到一个新基可行解 $X^{(1)}$。因 $\sigma_{m+k} = 0$，$z = z_0$，故 也是最优解，于是 $X^{(0)}$、$X^{(1)}$ 连线上的所有点都是最优解。

针对无界解判别定理，可构造一个新的解 $X^{(1)}$，它的分量为

$$x_i^{(1)} = b'_i - \lambda a_{i,\,m+k}\ (\lambda > 0),\ x_{m+k}^{(1)} = \lambda$$

$$x_j^{(1)} = 0\ (j = m+1, \cdots, n,\ 且\ j \neq m+k)$$

因 $a_{i,\,m+k} \leqslant 0$，所以对任意 $\lambda > 0$ 都是可行解，把 $x^{(1)}$ 代入目标函数内，得 $z = z_0 + \lambda\sigma_{m+k}$。因 $\sigma_{m+k} > 0$，故当 $\lambda \to +\infty$ 时，$z \to +\infty$，故本例的目标函数无界。

附　录　B

1. 动态规划的最优性定理证明

证明：(1)必要性。设 $p^*_{0,\,n-1}$ 是最优策略，则

$$\begin{aligned} V_{0,\,n-1}(s_0,\ p^*_{0,\,n-1}) &= \underset{p_{0,\,n-1} \in P_{0,\,n-1}}{\text{opt}} V_{0,\,n-1}(s_0,\ p_{0,\,n-1}) \\ &= \underset{p_{0,\,n-1} \in P_{0,\,n-1}}{\text{opt}} [V_{0,\,k-1}(s_0,\ p_{0,\,k-1}) + V_{k,\,n-1}(\tilde{s}_k,\ p_{k,\,n-1})] \end{aligned}$$

k 到 $n-1$ 阶段的总指标取决于过程的起始点 $\tilde{s}_k = T_{k-1}(s_{k-1},\ u_{k-1})$ 和子策略 $p_{k,\,n-1}$，起始点是由前段子过程在子策略 $p_{0,\,k-1}$ 下确定的。在策略集合 $p_{0,\,n-1}$ 上求最优解，先在 $p_{k,\,n-1}(\tilde{s}_k)$ 上求最优解，然后再求这些子最优解在子策略集合 $p_{0,\,k-1}(s_0)$ 上的最优解。所以上式写为 $V_{0,\,n-1}(s_0,\ p^*_{0,\,n-1}) = \underset{p_{0,\,k-1} \in P_{0,\,k-1}(s_0)}{\text{opt}} \{ \underset{p_{k,\,n-1} \in P_{k,\,n-1}(\tilde{s}_k)}{\text{opt}} [V_{0,\,k-1}(s_0,\ p_{0,\,k-1}) + V_{k,\,n-1}(\tilde{s}_k,\ p_{k,\,n-1})] \}$，但是括号里的第一项与子策略 $p_{k,\,n-1}$ 无关，所以

$$V_{0,\,n-1}(s_0, p^*_{0,\,n-1}) = \underset{p_{0,\,k-1} \in P_{0,\,k-1}}{\text{opt}} \{ V_{0,\,k-1}(s_0,\ p_{0,\,k-1}) + \underset{p_{k,\,n-1} \in P_{k,\,n-1}}{\text{opt}} V_{k,\,n-1}(\tilde{s}_k,\ p_{k,\,n-1}) \}$$

(2)充分性。设 $p_{0,\,n-1} = (p_{0,\,k-1},\ p_{k,\,n-1})$ 为任一策略，$\tilde{s}_k$ 为由 $(s_0,\ p_{0,\,k-1})$ 所确定的 k 阶段的起始状态。那么有

$$\begin{cases} V_{k,n-1}(\tilde{s}_k, p_{k,n-1}) \leqslant \underset{p_{k,n-1}\in P_{k,n-1}(\tilde{s}_k)}{\text{opt}} V_{k,n-1}(\tilde{s}_k, p_{k,n-1}) & \text{opt 表示 max} \\ V_{k,n-1}(\tilde{s}_k, p_{k,n-1}) \geqslant \underset{p_{k,n-1}\in P_{k,n-1}(\tilde{s}_k)}{\text{opt}} V_{k,n-1}(\tilde{s}_k, p_{k,n-1}) & \text{opt 表示 min} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V_{0,n-1}(s_0, p_{0,n-1}) &= V_{0,k-1}(s_0, p_{0,k-1}) + V_{k,n-1}(\tilde{s}_k, p_{k,n-1}) \\ &\leqslant V_{0,k-1}(s_0, p_{0,k-1}) + \underset{p_{k,n-1}\in P_{k,n-1}(\tilde{s}_k)}{\text{opt}} V_{k,n-1}(\tilde{s}_k, p_{k,n-1}) \\ &\leqslant \underset{p_{0,k-1}\in P_{0,k-1}(s_0)}{\text{opt}} \{V_{0,k-1}(s_0, p_{0,k-1}) + \underset{p_{k,n-1}\in P_{k,n-1}(\tilde{s}_k)}{\text{opt}} V_{k,n-1}(\tilde{s}_k, p_{k,n-1})\} \\ &= V_{0,n-1}(s_0, p_{0,n-1}^*) \quad \text{opt 表示 max} \end{aligned}$$

或
$$\begin{aligned} V_{0,n-1}(s_0, p_{0,n-1}) &= V_{0,k-1}(s_0, p_{0,k-1}) + V_{k,n-1}(\tilde{s}_k, p_{k,n-1}) \\ &\geqslant V_{0,k-1}(s_0, p_{0,k-1}) + \underset{p_{k,n-1}\in P_{k,n-1}(\tilde{s}_k)}{\text{opt}} V_{k,n-1}(\tilde{s}_k, p_{k,n-1}) \\ &\geqslant \underset{p_{0,k-1}\in P_{0,k-1}(s_0)}{\text{opt}} \{V_{0,k-1}(s_0, p_{0,k-1}) + \underset{p_{k,n-1}\in P_{k,n-1}(\tilde{s}_k)}{\text{opt}} V_{k,n-1}(\tilde{s}_k, p_{k,n-1})\} \\ &= V_{0,n-1}(s_0, p_{0,n-1}^*) \quad \text{opt 表示 min} \end{aligned}$$

所以，对任一 $p_{0,n-1}$，都有 $V_{0,n-1}(s_0, p_{0,n-1}) \leqslant V_{0,n-1}(s_0, p_{0,n-1}^*)$，opt 表示 max 或 $V_{0,n-1}(s_0, p_{0,n-1}) \geqslant V_{0,n-1}(s_0, p_{0,n-1}^*)$，opt 表示 min。因此 $p_{0,n-1}^*$ 是最优策略。

2. 动态规划的最优性定理推论

证明：若 $p_{k,n-1}^*$ 不是最优策略，则有

$$\begin{cases} V_{k,n-1}(s_k^*, p_{k,n-1}^*) < \underset{p_{k,n-1}\in P_{k,n-1}(s_k^*)}{\text{opt}} V_{k,n-1}(s_k^*, p_{k,n-1}) & \text{opt 表示 max} \\ V_{k,n-1}(s_k^*, p_{k,n-1}^*) > \underset{p_{k,n-1}\in P_{k,n-1}(s_k^*)}{\text{opt}} V_{k,n-1}(s_k^*, p_{k,n-1}) & \text{opt 表示 min} \end{cases}$$

因而
$$\begin{aligned} V_{0,n-1}(s_0, p_{0,n-1}^*) &= V_{0,k-1}(s_0, p_{0,k-1}^*) + V_{k,n-1}(s_k^*, p_{k,n-1}^*) \\ &< V_{0,k-1}(s_0, p_{0,k-1}^*) + \underset{p_{k,n-1}\in P_{k,n-1}(s_k^*)}{\text{opt}} V_{k,n-1}(s_k^*, p_{k,n-1}) \\ &< \underset{p_{0,k-1}\in P_{0,k-1}(s_0)}{\text{opt}} \{V_{0,k-1}(s_0, p_{0,k-1}) + \underset{p_{k,n-1}\in P_{k,n-1}(\tilde{s}_k)}{\text{opt}} V_{k,n-1}(\tilde{s}_k, p_{k,n-1})\} \end{aligned}$$

或
$$\begin{aligned} V_{0,n-1}(s_0, p_{0,n-1}^*) &= V_{0,k-1}(s_0, p_{0,k-1}^*) + V_{k,n-1}(s_k^*, p_{k,n-1}^*) \\ &> V_{0,k-1}(s_0, p_{0,k-1}^*) + \underset{p_{k,n-1}\in P_{k,n-1}(s_k^*)}{opt} V_{k,n-1}(s_k^*, p_{k,n-1}) \\ &> \underset{p_{0,k-1}\in P_{0,k-1}(s_0)}{\text{opt}} \{V_{0,k-1}(s_0, p_{0,k-1}) + \underset{p_{k,n-1}\in P_{k,n-1}(\tilde{s}_k)}{\text{opt}} V_{k,n-1}(\tilde{s}_k, p_{k,n-1})\} \end{aligned}$$

与动态规划最优性定理的必要性矛盾，得证。

附　录　C

(1) 任一个图中，奇点的个数为偶数。

证明：由于 $\sum_{v\in V_1} d(v) + \sum_{v\in V_2} d(v) = \sum_{v\in V} d(v) = 2q$，因为 $\sum_{v\in V} d(v)$ 和 $\sum_{v\in V_2} d(v)$ 都是偶数，所以 $\sum_{v\in V_1} d(v)$ 一定也是偶数，从而 V_1 的点数是偶数。

(2)设图 $G=(V,E)$ 是一个树，$p(G)\geqslant 2$，则 G 中至少有两个悬挂点。

证明：令 $P=(v_1,v_2,\cdots,v_k)$ 是 G 中含边数最多的一条初等链，因为 G 是连通的，且 $p(G)\geqslant 2$，所以链 P 中至少有一条边，从而 v_1 与 v_k 是不同的。

如果 v_1 是悬挂点，即 $d(v_1)=1$。如果 $d(v_1)\geqslant 2$，那么存在边 $[v_1,v_m]$，使 $m\neq 2$。若点 v_m 不在 P 上，那么 $(v_m,v_1,v_2,\cdots,v_k)$ 是 G 中的一条初等链，它含的边数比 P 多一条，这与 P 是含边数最多的初等链矛盾；若点 v_m 在 P 上，那么 $(v_1,v_2,\cdots,v_m,v_1)$ 是 G 中的一个圈，这与树的定义矛盾。因此，必定有 $d(v_1)=1$，即 v_1 是悬挂点。同理可证，v_k 也是悬挂点，所以 G 至少有两个悬挂点。证毕。

(3)图 $G=(V,E)$ 是一个树的充分必要条件是 G 不含圈，且恰有 $p-1$ 条边。

证明：①必要性。设 G 是一个树，G 不含圈，只要证明 G 恰好有 $p-1$ 条边即可。对点 p 施行数学归纳法。$p=1,2$ 时，结论显然成立。假设对点数 $p\leqslant n$ 时，结论成立。

设树 G 含 $n+1$ 个点。G 含悬挂点，设 v_1 是 G 的一个悬挂点，考虑图 $G-v_1$，显然有 $p(G-v_1)=n$，$q(G-v_1)=q(G)-1$。因 $G-v_1$ 是 n 个点的树，$q(G-v_1)=n-1$，于是 $q(G)=q(G-v_1)+1=(n-1)+1=n=p(G)-1$。

②充分性。证明 G 是连通的。设 G 是不连通的，G 含 s 个连通分图 $G_1,G_2,\cdots,G_s(s\geqslant 2)$。因每个 $G_i(i=1,2,\cdots,s)$ 是连通的，并且不含圈，所以每个 G_i 都是树。设 G_i 有 p_i 个点，则 G_i 有 p_i-1 条边，于是 $q(G)=\sum_{i=1}^{s}q(G_i)=\sum_{i=1}^{s}(p_i-1)=\sum_{i=1}^{s}p_i-s=p(G)-s\leqslant p(G)-2$。

这与 $q(G)=p(G)-1$ 的假设矛盾。

(4)图 $G=(V,E)$ 是一个树的充分必要条件是 G 是连通图，并且 $q(G)=p(G)-1$。

证明：①必要性。设 G 是树，则 G 是连通图，有 $q(G)=p(G)-1$。

②充分性。只要证明 G 不含圈，对点数施行归纳。$p(G)=1$、2 时，结论显然成立。

设 $p(G)=n(n\geqslant 1)$ 时结论成立。设 $p(G)=n+1$，证明 G 必有悬挂点。因 G 是连通的，且 $p(G)\geqslant 2$，故对每个点 v_i，都有 $d(v_i)\geqslant 2$，从而 $q(G)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p(G)}d(v_i)\geqslant p(G)$。这与 $q(G)=p(G)-1$ 矛盾，所以 G 必有悬挂点。

设 v_1 是 G 的一个悬挂点，考虑 $G-v_1$，这个图仍然是连通的，有

$$q(G-v_1)=q(G)-1=p(G)-2=p(G-v_1)-1$$

由归纳假设可知 $G-v_1$ 不含圈，于是 G 也不含圈，即 G 是一个树。证毕。

(5)图 G 是树的充分必要条件是任意两个顶点之间恰有一条链。

证明：①必要性。因 G 是连通的，所以任意两个点之间至少有一条链。但是如果某两个点之间有两条链，那么图 G 中含有圈，这就与树的定义矛盾，所有任意两个点之间恰好只有一条链。

②充分性。设图 G 中任意两个点之间恰有一条链，那么显然 G 是连通的。如果 G 中含有圈，那么这个圈上的两个顶点之间有两条链，这与假设矛盾，所以 G 不含圈，也即 G 是树。

(6)图 G 有支撑树的充分必要条件是图 G 是连通的。

证明：①必要性是显然的。

②充分性。设图 G 是连通图，如果 G 不含圈，那么 G 本身是一个树，从而 G 是它自身的一个支撑树。现假设 G 含圈，任取其中一个圈，从圈中任意地去掉一条边，得到图 G 的一个支撑子图 G_1。如果 G_1 不含圈，那么 G_1 是 G 的一个支撑树(因为显然 G_1 是连通的)；

如果 G_1 仍然含圈，那么从 G_1 中任取一个圈，再从圈中任意去掉一条边，得到图 G 的一个支撑子图 G_2。如此重复下去，可以得到 G 的一个不含圈的支撑子图 G_k，于是 G_k 是 G 的一个支撑树。

（7）可行流 f^* 是最大流，当且仅当不存在关于 f^* 的增广链。

证明：若 f^* 是最大流，设 D 中存在 f^* 的增广链 μ，令

$$\theta = \min\{\min_{\mu^+}(c_{ij} - f_{ij}^*),\ \min_{\mu^-} f_{ij}^*\}$$

由增广链的定义可知，$\theta > 0$，令

$$f_{ij}^{**} = \begin{cases} f_{ij}^* + \theta & (v_i, v_j) \in \mu^+ \\ f_{ij}^* - \theta & (v_i, v_j) \in \mu^- \\ f_{ij}^* & (v_i, v_j) \notin \mu \end{cases}$$

$\{f_{ij}^{**}\}$ 是一个可行流，且 $v(f^{**}) = v(f^*) + \theta > v(f^*)$。这与 f^* 是最大流的假设相矛盾。现设 D 中不存在关于 f^* 的增广链，证明 f^* 是最大流。利用下面的方法来定义 V_1^*。

令 $v_s \in V_1^*$，若 $v_i \in V_1^*$，且 $f_{ij}^* < c_{ij}$，则令 $v_j \in V_1^*$。若 $v_i \in V_1^*$，且 $f_{ji} > 0$，则令 $v_j \in V_1^*$。因为不存在关于 f^* 的增广链，所以 $v_t \notin V_1^*$。记 $\overline{V}_1^* = V \backslash V_1^*$，于是得到一个截集 $(V_1^*, \overline{V}_1^*)$，有 $f_{ij}^* = \begin{cases} c_{ij} & (v_i, v_j) \in (V_1^*, \overline{V}_1^*) \\ 0 & (v_i, v_j) \in (\overline{V}_1^*, V_1^*) \end{cases}$，所以 $v(f^*) = c(V_1^*, \overline{V}_1^*)$。于是 f^* 必定是最大流。

（8）连通多重图 G 有欧拉圈，当且仅当 G 中无奇点。

证明：①必要性是显然的。

②充分性。设 G 至少有三个点，对边数 $q(G)$ 进行数学归纳，因 G 是连通图，不含奇点，故 $q(G) \geqslant 3$。首先 $q(G) = 3$ 时，G 显然是欧拉图。

再看 $q(G) = n+1$ 的情况，因 G 是不含奇点的连通图，并且 $p(G) \geqslant 3$，故存在三个点 u、v、w，使 $[u, v]$、$[w, v] \in E$。从 G 中删去边 $[u, v]$、$[w, v]$，增加新的边 $[u, w]$，得到新的多重图 G'。G' 有 $q(G) - 1$ 条边，并且仍不含奇点，G' 至多有两个分图。

若 G' 是连通的，G' 有欧拉圈 C'。把 C' 中的 $[w, u]$ 这条边换成 $[w, v]$、$[v, u]$，即得 G 中的欧拉圈。

现设 G' 有两个分图 G_1，G_2。设 v 在 G_1 中。根据归纳假设，G_1、G_2 分别有欧拉圈 C_1、C_2，则把 C_2 中的 $[u, w]$ 这条边换成 $[u, v]$，C_1 及 $[v, w]$，即得 G 的欧拉圈。证毕。

（9）连通多重图 G 有欧拉链，当且仅当 G 恰有两个奇点。

证明：①必要性是显然的。

②充分性。现设连通多重图 G 恰有两个奇点 u，v。在 G 中增加一条新的边 $[u, v]$（如果在 G 中，u、v 之间就有边，那么这个新边是原有边上的重复边），得连通多重图 G'，显然 G' 中没有奇点。由定理3可知，G' 有欧拉圈 C'，从 C' 中删去增加的那条新边 $[u, v]$，即得 G 中的一条连接 u、v 的欧拉链。证毕。

附　录　D

1. 定理的证明

证明：（1）充分性。由于对任意 i、j 均有 $a_{ij^*} \leqslant a_{i^*j^*} \leqslant a_{i^*j}$，故 $\max_i a_{ij^*} \leqslant a_{i^*j^*} \leqslant \min_j a_{i^*j}$。

又因 $\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} \leqslant \max\limits_i a_{ij^*}$，$\min\limits_j a_{i^*j} \leqslant \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$，所以 $\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} \leqslant a_{i^*j^*} \leqslant \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$。

对于任给的 i、j 有 $\min\limits_j a_{ij} \leqslant a_{ij} \leqslant \max\limits_i a_{ij}$，所以 $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} \leqslant \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$。于是 $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = a_{i^*j^*}$ 且 $V_G = a_{i^*j^*}$。

(2) 必要性。设有 i^*, j^* 使得 $\min\limits_j a_{i^*j} = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$，$\max\limits_i a_{ij^*} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$。由 $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$ 可得 $\max\limits_i a_{ij^*} = \min\limits_j a_{i^*j} \leqslant a_{i^*j^*} \leqslant \max\limits_i a_{ij^*} = \min\limits_j a_{i^*j}$。所以对任意 i，j 有 $a_{ij^*} \leqslant \max\limits_i a_{ij^*} \leqslant a_{i^*j^*} \leqslant \min\limits_j a_{i^*j} \leqslant a_{i^*j}$。

2. 定理 3 的证明

证明：(1) 充分性。设 (x^*, y^*) 是 G 的解，$E(x, y^*) \leqslant E(x^*, y^*) \leqslant E(x^*, y)$，由于纯策略是混合策略的特例，所以成立。

(2) 必要性。由于

$$E(x, y^*) = \sum_i E(i, y^*)x_i \leqslant E(x^*, y^*) \sum_i x_i = E(x^*, y^*)$$

$$E(x^*, y) = \sum_j E(x^*, j)y_j \geqslant E(x^*, y^*) \sum_j y_j = E(x^*, y^*)$$

可得 $E(x, y^*) \leqslant E(x^*, y^*) \leqslant E(x^*, y)$。

3. 定理 5 的证明

证明：考虑如下两个线性规划问题。

$$
① \quad \max w \quad (P)\begin{cases} \sum\limits_i a_{ij}x_i \geqslant w & j = 1, \cdots, n \\ \sum\limits_i x_i = 1 & \\ x_i \geqslant 0 & i = 1, \cdots, m \end{cases} ; \quad ② \quad \min v \quad (D)\begin{cases} \sum\limits_j a_{ij}y_j \leqslant v & i = 1, \cdots, m \\ \sum\limits_j y_j = 1 & \\ y_j \geqslant 0 & j = 1, \cdots, n \end{cases}
$$

问题 (P) 和 (D) 是互为对偶的线性规划问题，且 $x = (1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}} \in E^m$，$w = \min\limits_j a_{1j}$ 是问题 (P) 的一个可行解。$y = (1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}} \in E^n$，$v = \max\limits_i a_{i1}$ 是问题 (D) 的一个可行解。

假定 (P) 和 (D) 存在最优解 (x^*, w^*) 和 (y^*, v^*)，且 $v^* = w^*$，即 $x^* \in S_1^*$，$y^* \in S_2^*$ 和数 v^*，对任意 $i = 1, \cdots, m$ 和 $j = 1, \cdots, n$，有 $\sum\limits_j a_{ij}y_j^* \leqslant v^* \leqslant \sum\limits_i a_{ij}x_i^*$ 或 $E(i, y^*) \leqslant v^* \leqslant E(x^*, j)$。

由 $E(x^*, y^*) = \sum\limits_i E(i, y^*)x_i^* \leqslant v^* \sum\limits_i x_i^* = v^*$，$E(x^*, y^*) = \sum\limits_j E(x^*, j)y_j^* \geqslant v^* \sum\limits_j y_j^* = v^*$ 可得 $v^* = E(x^*, y^*)$。

4. 定理 6 的证明

证明：按定义有 $v = \max\limits_{x \in S_1^*} E(x, y^*)$，故 $v - \sum\limits_j a_{ij}y_j^* = \max\limits_{x \in S_1^*} E(x, y^*) - E(i, y^*) \geqslant 0$。

又因为 $\sum\limits_i x_i^*(v - \sum\limits_j a_{ij}y_j^*) = v - \sum\limits_i \sum\limits_j a_{ij}x_i^* y_j^* = 0$，$x_i^* \geqslant 0 (i = 1, \cdots, m)$。

所以，当 $x_i^* > 0$ 时，必有 $\sum\limits_j a_{ij}y_j^* = v$；当 $\sum\limits_j a_{ij}y_j^* < v$ 时，必有 $x_i^* = 0$。

5. 定理 10 的证明

证明：假设 α_2 优超于 α_1，即 $a_{2j} \geqslant a_{1j}(j=1, \cdots, n)$。因为 $x^* = (x_2^*, \cdots, x_m^*)^{\mathrm{T}}$ 和 $y^* = (y_1^*, \cdots, y_n^*)$ 是 G' 的解，故 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j^* \leqslant V_{G'} \leqslant \sum_{i=2}^{m} a_{ij}x_i^*$ $(i=2, \cdots, m; j=1, \cdots, n)$。

因 α_2 优超于 α_1，有 $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_i^* \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j^* \leqslant V_{G'}$，于是

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j^* \leqslant V_{G'} \leqslant \sum_{i=2}^{m} a_{ij}x_i^* + a_{1j} \times 0 \ (i=1, \cdots, m; j=1, \cdots, n)$$

或

$$E(i, y^*) \leqslant V_{G'} \leqslant E(x^*, j) \ (i=1, \cdots, m; j=1, \cdots, n)$$

由定理 4 可知，(x^*, y^*) 是 G 的解，其中 $x^* = (0, x_2^*, \cdots, x_m^*)^{\mathrm{T}}$，且 $V_{G'} = V_G$。

6. 定理 11 的证明

证明：因 V_G 是对策的值，故 $V_G = \max\limits_{x \in S_1^*} \min\limits_{y \in S_2^*} E(x, y) = \min\limits_{y \in S_2^*} \max\limits_{x \in S_1^*} E(x, y)$。

对任意 $x \in S_1^*$，$\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} E(x, j) \geqslant \min\limits_{y \in S_2^*} E(x, y)$，故 $\max\limits_{x \in S_1^*} \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} E(x, j) \geqslant \max\limits_{x \in S_1^*} \min\limits_{y \in S_2^*} E(x, y)$。

对任意 $x \in S_1^*$，$y \in S_2^*$，有 $E(x, y) = \sum_{j=1}^{n} E(x, j) y_j \geqslant \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} E(x, j)$，因此

$$\min_{y \in S_2^*} E(x, y) \geqslant \min_{1 \leqslant j \leqslant n} E(x, j), \ \max_{x \in S_1^*} \min_{y \in S_2^*} E(x, y) \geqslant \max_{x \in S_1^*} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} E(x, j)$$

于是，$V_G = \max\limits_{x \in S_1^*} \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} E(x, j)$。同理可证 $V_G = \min\limits_{y \in S_2^*} \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} E(i, y)$。

参 考 文 献

[1] 运筹学教材编写组. 运筹学[M]. 北京：清华大学出版社，2000.
[2] 胡运权. 运筹学习题集[M]. 北京：清华大学出版社，1995.
[3] 胡运权. 运筹学教程[M]. 北京：清华大学出版社，2007.
[4] 运筹学教材编写组. 运筹学[M]. 3 版. 北京：清华大学出版社，2005.
[5] 运筹学教材编写组. 运筹学[M]. 4 版. 北京：清华大学出版社，2012.
[6] 胡运权. 运筹学习题集[M]. 北京：清华大学出版社，2010.